計算量理論

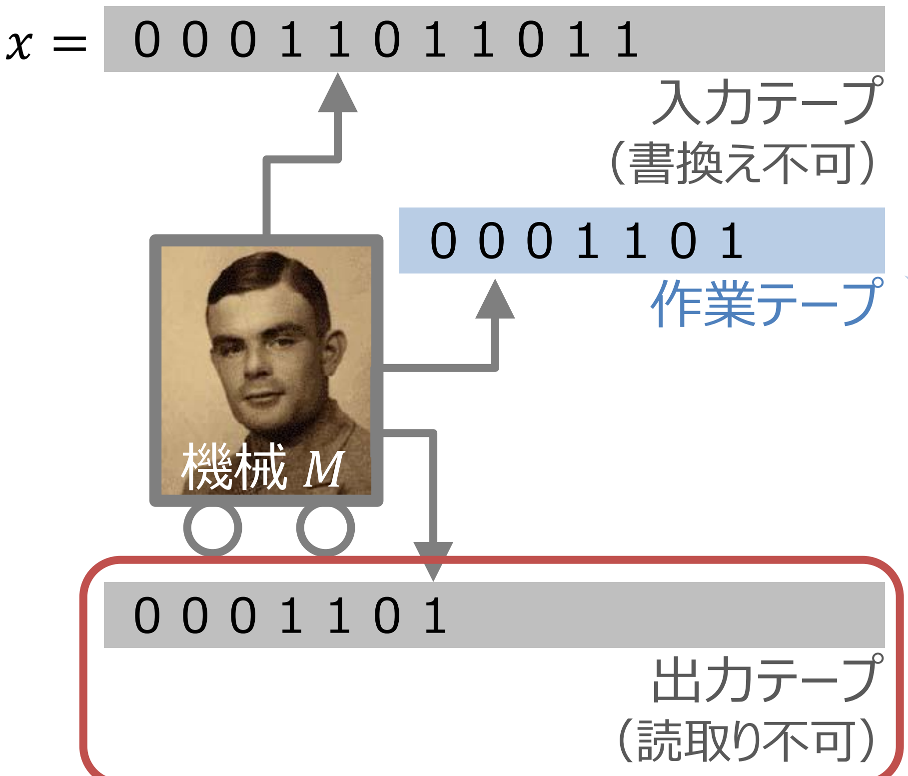
先週の続きは次回

平成26年12月16日

代講　河村彰星（今井研助教）

http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~kawamura/teaching/0510021/

空間量の制限



出力を書く
という代わりに

と考えることも
（判定問題の場合）

定義

この機械 M が **多項式空間** / **対数空間** とは
或る多項式 $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が存在し
任意の入力 x について
（乱択機械においては更に、任意の乱数で）

（停止し、それまでに）

作業テープ上で訪れる桝目の個数

（入出力テープは度外視）

が $p(|x|)$ / $\log p(|x|)$ 以内であること

入力よりも
小さい作業領域！

「多項式」$= |x|^{O(1)} = 2^{\log|x|}$

「対数」$= O(\log|x|)$

定義

PSPACE

判定問題 A が級 L に属するとは

NL

多項式

対数空間の機械 M が存在し 各入力 x で

乱択機械

$A(x) =$ 真 のとき $M(x)$ は受理

∃乱数 r で $M(x, r)$ は受理

$A(x) =$ 偽 のとき $M(x)$ は拒否

∀乱数 r で $M(x, r)$ は拒否

$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}$

自明 後で 自明 後で

PSPACE に属する問題の例

問題 QBF

与えられた量化命題論理式

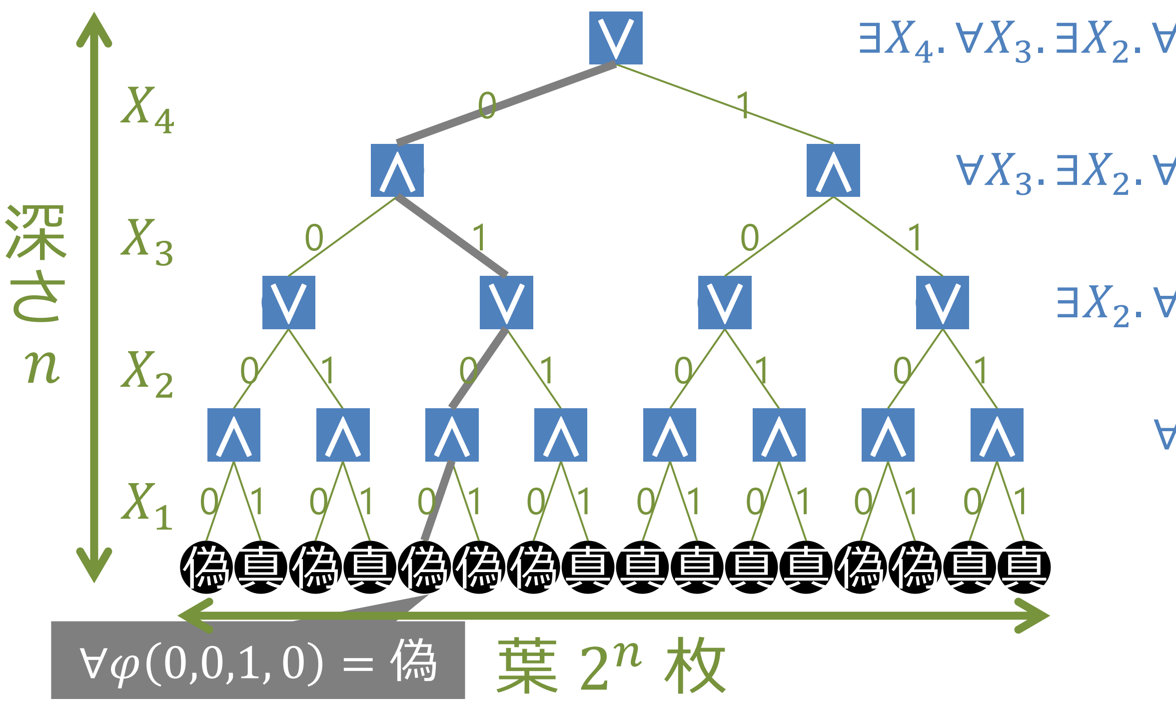
$$Q_n X_n . Q_{n-1} X_{n-1} \dots Q_1 X_1 . \varphi(X_1, \dots, X_n)$$

の真偽を判定せよ

命題変数
真（1）か偽（0）の値をとる

量化子（∀ か ∃）
これが ∃ のみだと SAT

例 $\exists X_4 . \forall X_3 . \exists X_2 . \forall X_1 . \underline{(X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee X_4)}$



$\forall \varphi(0,0,1,0) = $ 偽
容易に計算できる

$\mathrm{QBF}\big(\forall x . \psi(x)\big)$
$= \mathrm{QBF}\big(\psi(0)\big) \wedge \mathrm{QBF}\big(\psi(1)\big)$
$\mathrm{QBF}\big(\exists x . \psi(x)\big)$
$= \mathrm{QBF}\big(\psi(0)\big) \vee \mathrm{QBF}\big(\psi(1)\big)$

深さ優先探索
➡ 空間量 $O(n)$

対数空間で計算できる函数の例

※ L という記号は　本講義では
判定問題のみに使うことにします

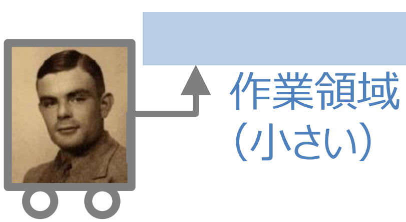
問題
ADD

幾つかの
与えられた~~二つの~~整数（十進表記）の和を求めよ

$$
\begin{array}{r}
9872394872395862398472395872395872491862 \\
+\ 8573458234634817591285738363645757684773 \\
\hline
18445853107030679989758134236041630176635
\end{array}
$$

「端から見てやれば特に何も書き留めずにできる」

$$
\begin{array}{r}
1982928827842935629384723 \\
+\ 73402398561823472 \\
+\ 64409359203603958039572034 \\
+\ 7286263498236423745 \\
+\ 8256204469283692834837 \\
\hline
66400551595582074160038811
\end{array}
$$



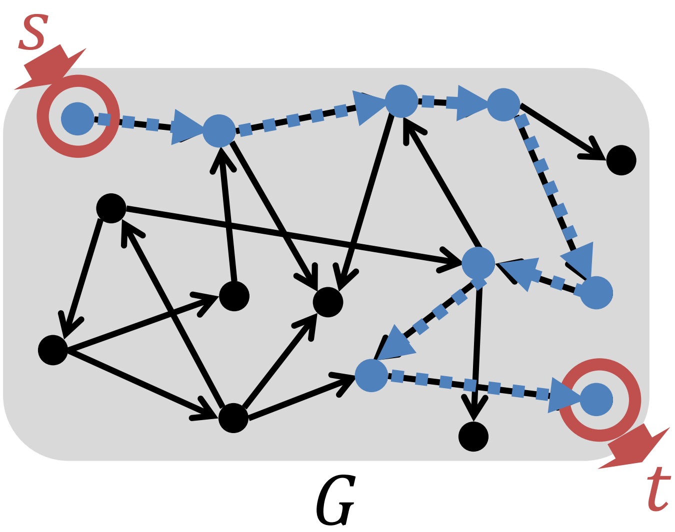
途中結果を憶える
余裕はないが……

まとめて筆算 ➡ 空間量 $O(\log n)$

NL に属する問題の例

問題
DPATH

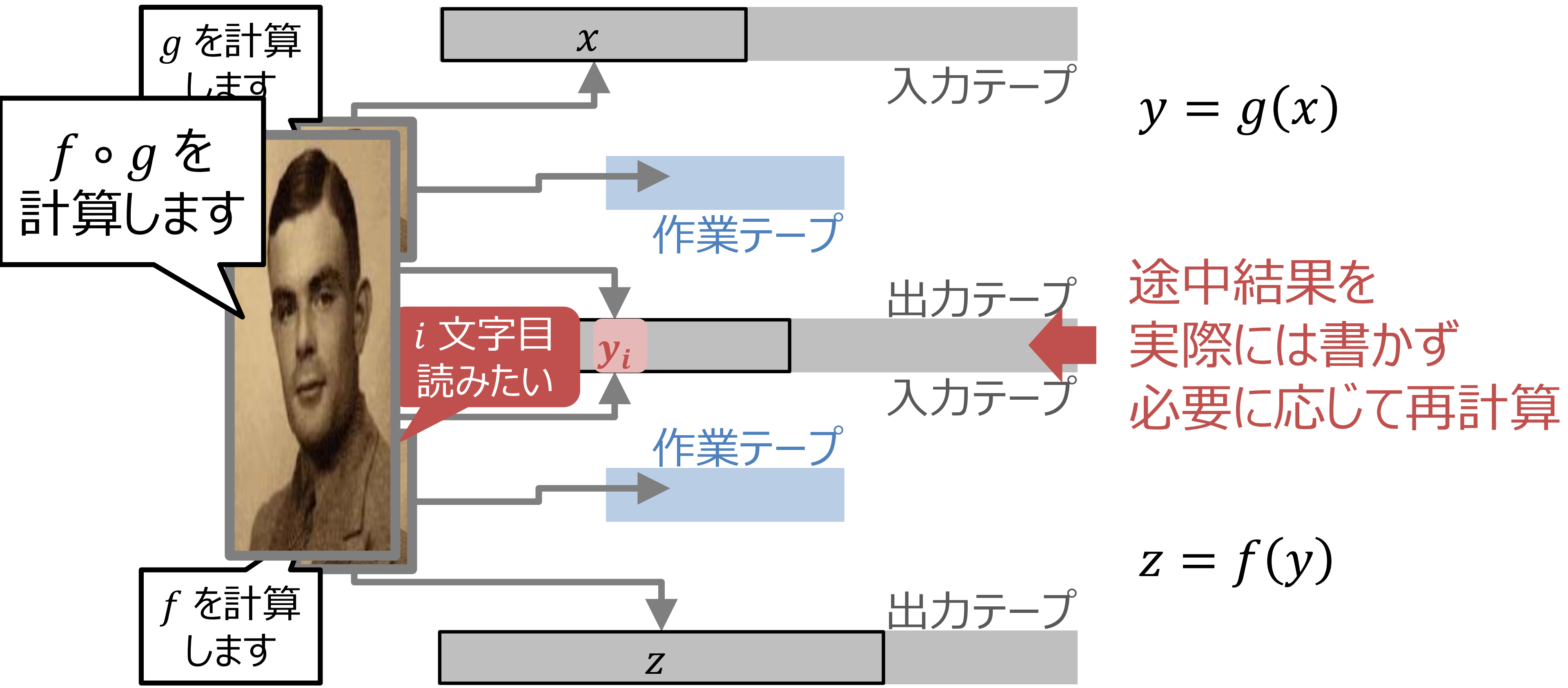
与えられた有向グラフ G と
その二頂点 s, t に対し
s から t への路があるか判定せよ



辺を乱択しながら歩く
空間量 $O(\log n)$

定理

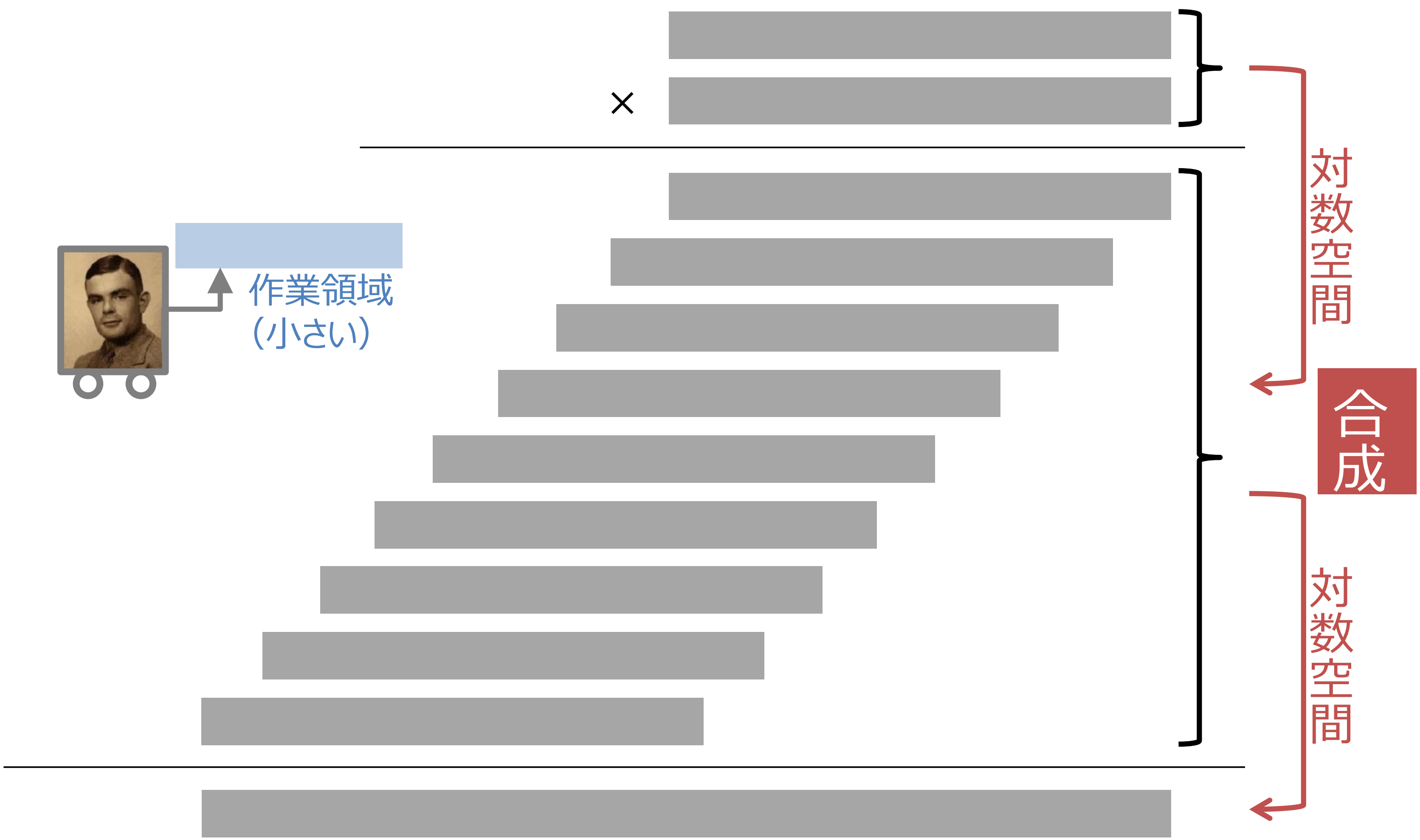
函数 f と g が対数空間で計算可能ならば
合成 $f \circ g$ もまた然り



対数空間で計算できる函数の例

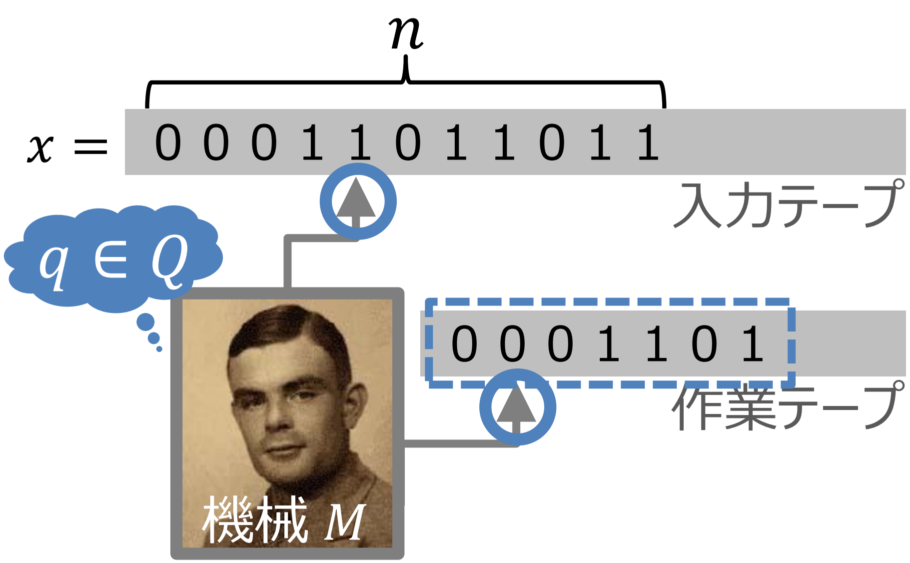
問題 MUL

与えられた二つの整数の積を求めよ



時点表示グラフ

機械 M に x を入力して計算



M が対数空間

➡ 時点表示は $\mathrm{poly}(n)$ 個

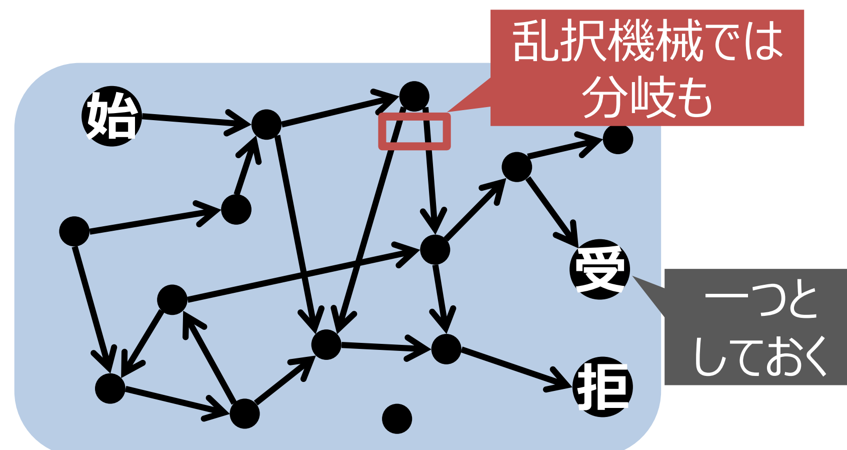
M が多項式空間

➡ 時点表示は $2^{\mathrm{poly}(n)}$ 個

或る時点での状況を
完全に記述するには……

- ◆ 内部状態
- ◆ 作業テープの内容
- ◆ 入力・作業テープの頭の位置

この組合せを**時点表示**と呼ぶ



時点表示間の遷移関係
を表すグラフ $G_{M,x}$
（M と x から容易に作れる）

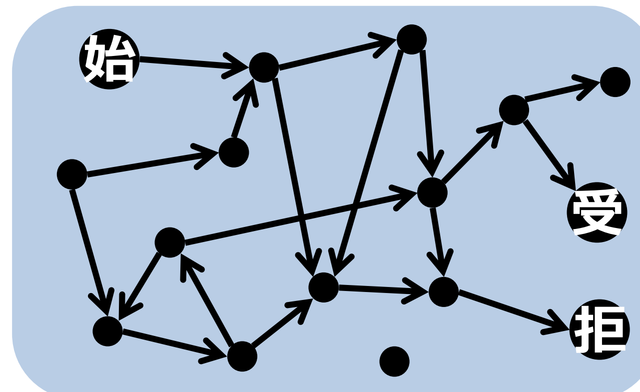
定理

$2^{\mathrm{poly}(n)}$ 時間

NL ⊆ P (N)PSPACE ⊆ EXP

多項式
対数 空間乱択機械の
時点表示グラフ $G_{M,x}$

頂点数 $2^{\mathrm{poly}(|x|)}$
$\mathrm{poly}(|x|)$



$G_{M,x}$

始 から 受 への路があるか調べればよい

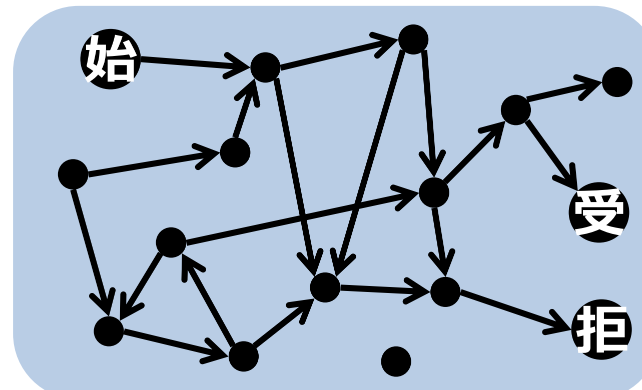
サヴィッチの定理

$\mathrm{O}\left((\log n)^2\right)$ 空間

NPSPACE = PSPACE　　**NL ⊆ L²**

多項式
対数
空間乱択機械の時点表示グラフ $G_{M,x} = (V, E)$

頂点数 $|V| = 2^{\mathrm{poly}(|x|)}$ / $\mathrm{poly}(|x|)$



「u から v へ長さ 2^i 以下の路あり」を $R(u, v, i)$ と書くと

$R(u, v, i+1)$ ⟺ 或る $w \in V$ が存在して $R(u, w, i)$ かつ $R(w, v, i)$

$R(u, v, 0)$ ⟺ $u = v$ または $(u, v) \in E$

これを再帰的に使って R(始, 受, $\lceil \log |V| \rceil$) を計算

➡ 空間量 $\mathrm{O}(\lceil \log |V| \rceil^2)$

定義（復習）

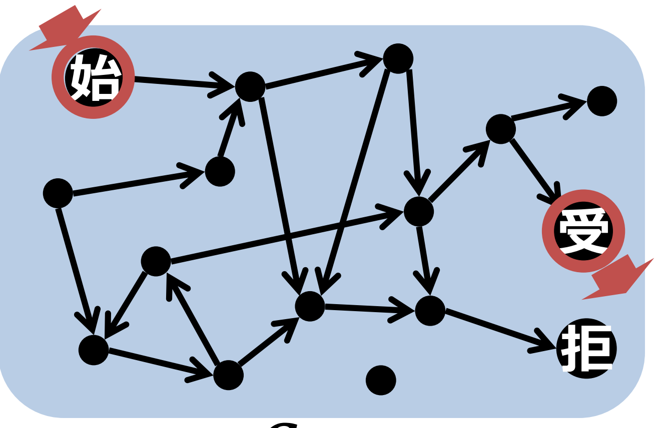
判定問題 A から B への（多対一）帰着 T とは
$A(x) = B\big(T(x)\big)$ なるもの

定理

「多項式時間」では
意味ないので

DPATH は（対数空間帰着について）$\mathbf{NL}$ 完全
すなわち任意の $A \in \mathbf{NL}$ は DPATH への対数空間の帰着をもつ

与えられた x を



$G_{M,x}$

に変換すればよい

定理

QBF は **PSPACE** 完全

A ∈ (**N**)**PSPACE** を QBF に帰着したい　すなわち

与えられた x を $R(始, 受, \lceil \log|V| \rceil)$ と同値な量化命題論理式 に変換したい
（多項式時間で）

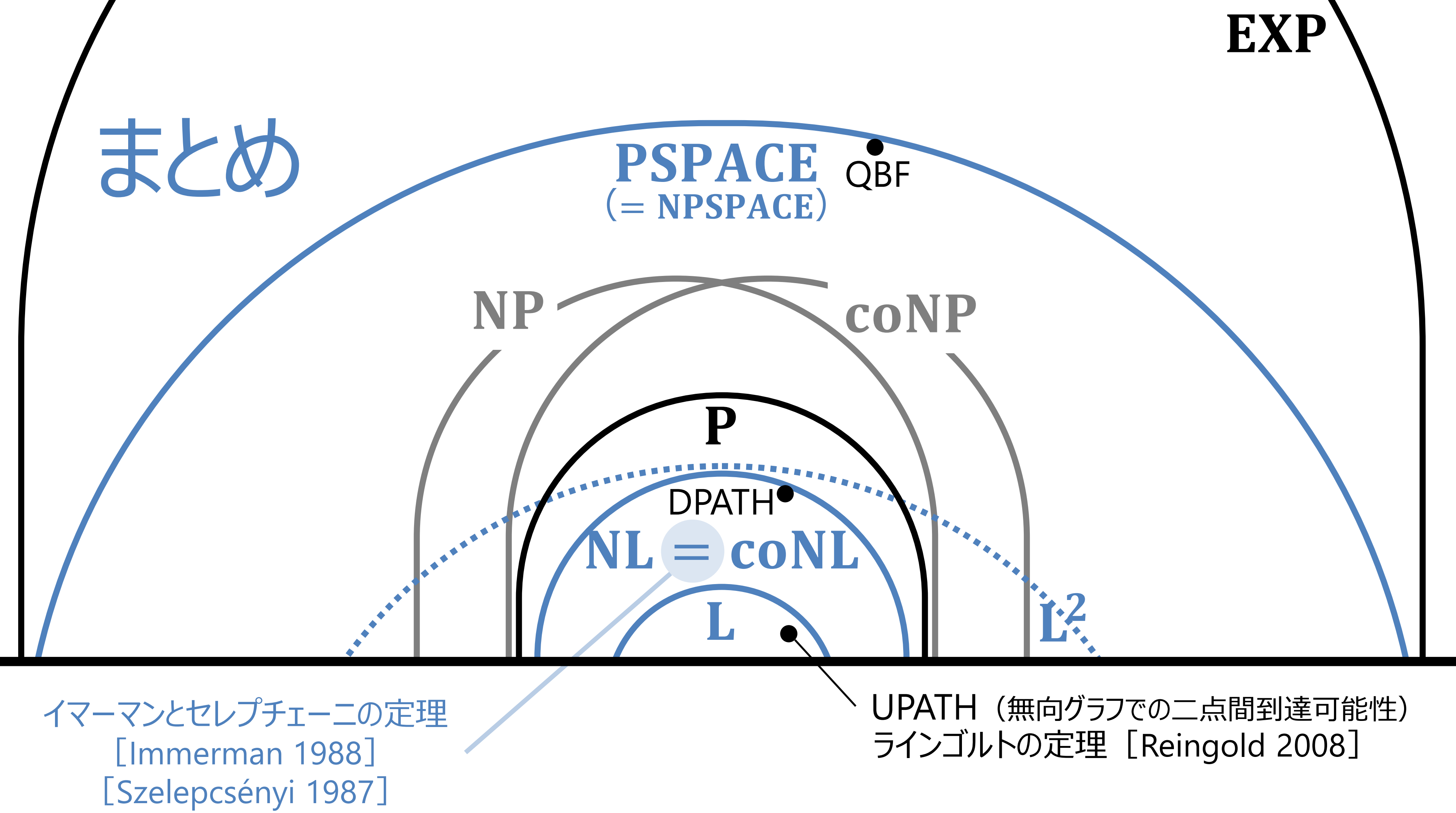
先程の漸化式

$R(u, v, i+1) \Leftrightarrow \exists\, w \in V.$
$R(u, w, i)$ かつ $R(w, v, i)$

をそのまま使って帰納的に展開すると指数長☹　そこで

$R(u, v, i+1) \Leftrightarrow \exists\, w \in V. \forall\, u' \in V. \forall\, v' \in V.$
もし $(u', v') = (u, w)$ または (w, v) ならば $R(u', v', i)$

としてから展開



未解決

$$\mathbf{L} \stackrel{?}{=} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{PSPACE}$$

終