計算量理論

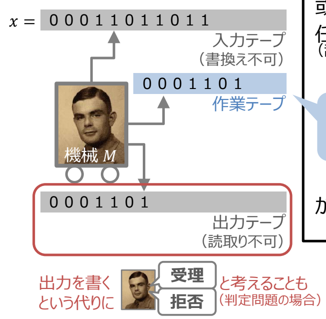
平成26年12月16日

代講　河村彰星（今井研助教）

http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~kawamura/teaching/0510021/

先週の続きは次回

空間量の制限



定義

この機械 M が 多項式空間 / 対数空間 とは
或る多項式 $p: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が存在し
任意の入力 x について
（乱択機械においては更に、任意の乱数で）
（停止し、それまでに）
作業テープ上で訪れる桝目の個数
（入出力テープは度外視）
が $p(|x|)$ / $\log p(|x|)$ 以内であること

入力よりも小さい作業領域！

「多項式」$= |x|^{O(1)} = 2^{\log|x|}$
「対数」$= O(\log|x|)$

定義

判定問題 A が級 PSPACE / L / NL に属するとは
多項式 / 対数空間の機械 M / 乱択機械 が存在し　各入力 x で

$A(x) =$ 真　のとき　$M(x)$ は受理
∃乱数 r で $M(x,r)$ は受理

$A(x) =$ 偽　のとき　$M(x)$ は拒否
∀乱数 r で $M(x,r)$ は拒否

$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}$

自明　後で　自明　後で

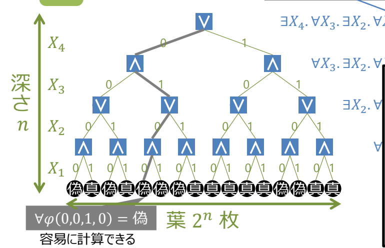
PSPACE に属する問題の例

問題 QBF　与えられた量化命題論理式
$Q_n X_n . Q_{n-1} X_{n-1} \ldots Q_1 X_1 . \varphi(X_1, \ldots, X_n)$
の真偽を判定せよ

命題変数
真（1）か偽（0）の値をとる

量化子（∀か∃）
これが∃のみだと SAT

例　$\exists X_4 . \forall X_3 . \exists X_2 . \forall X_1 . (X_2 \lor \neg X_3) \land (X_1 \lor X_4)$



$\mathrm{QBF}(\forall x . \psi(x))$
$= \mathrm{QBF}(\psi(0)) \land \mathrm{QBF}(\psi(1))$
$\mathrm{QBF}(\exists x . \psi(x))$
$= \mathrm{QBF}(\psi(0)) \lor \mathrm{QBF}(\psi(1))$

深さ優先探索
➡ 空間量 $O(n)$

対数空間で計算できる函数の例

※ **L** という記号は　本講義では判定問題のみに使うことにします

問題 ADD　与えられた ~~二つの~~ 幾つかの 整数（十進表記）の和を求めよ

```
   98723948723958623984723958723958723958724918 62
 + 85734582346348175912857383636457576847 73
 ---------------------------------------------
   1844585310703067998975813423604163017 6635
```

「端から見てやれば特に何も書き留めずにできる」

```
       1982928827842935629384723
     +        7340239856182347 2
     + 6440935920360395803957203 4
     +      72862634982364237 45
     +  8256204469283692834837
     ---------------------------
     6640055159558207416003881 1
```

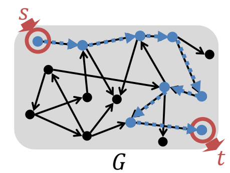
作業領域（小さい）

途中結果を憶える余裕はないが……

まとめて筆算 ➡ 空間量 $O(\log n)$

NL に属する問題の例

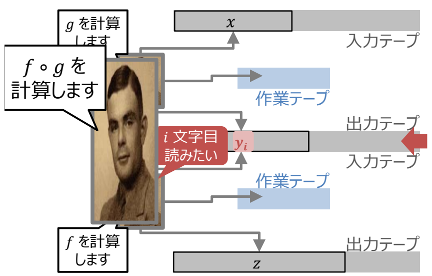
問題 DPATH　与えられた有向グラフ G と
その二頂点 s, t に対し
s から t への路があるか判定せよ



辺を乱択しながら歩く
➡ 空間量 $O(\log n)$

定理

函数 f と g が対数空間で計算可能ならば
合成 $f \circ g$ もまた然り



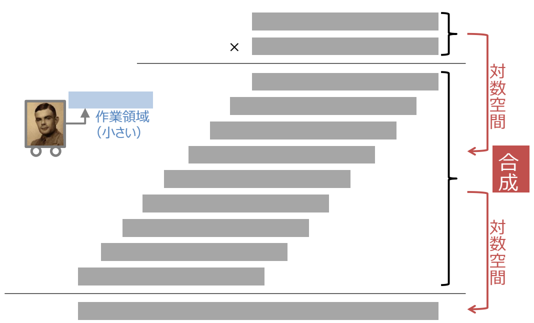
$y = g(x)$

途中結果を
実際には書かず
必要に応じて再計算

$z = f(y)$

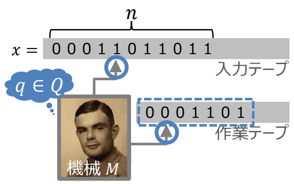
対数空間で計算できる函数の例

問題 MUL　与えられた二つの整数の積を求めよ



時点表示グラフ

機械 M に x を入力して計算



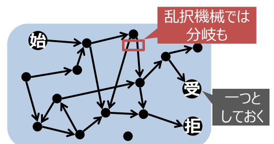
M が対数空間
➡ 時点表示は $\mathrm{poly}(n)$ 個

M が多項式空間
➡ 時点表示は $2^{\mathrm{poly}(n)}$ 個

或る時点での状況を
完全に記述するには……

- 内部状態
- 作業テープの内容
- 入力・作業テープの頭の位置

この組合せを**時点表示**と呼ぶ



時点表示間の遷移関係
を表すグラフ $G_{M,x}$
（M と x から容易に作れる）

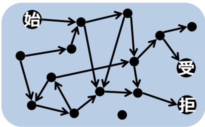
定理

$2^{\mathrm{poly}(n)}$ 時間

NL ⊆ P　　(N)**PSPACE ⊆ EXP**

多項式
対数 空間乱択機械の
時点表示グラフ $G_{M,x}$

頂点数 $2^{\mathrm{poly}(|x|)}$
$\mathrm{poly}(|x|)$



$G_{M,x}$

始 から 受 への路があるか調べればよい

定理

QBF は **PSPACE** 完全

A ∈ (N)**PSPACE** を QBF に帰着したい　すなわち

与えられた x を R(始, 受, $\lceil \log|V| \rceil$) と同値な量化命題論理式 に変換したい（多項式時間で）

先程の漸化式

$R(u,v,i+1)$ ⟺ $\exists\, w \in V.$
$R(u,w,i)$ かつ $R(w,v,i)$

をそのまま使って帰納的に展開すると指数長☹　そこで

$R(u,v,i+1)$ ⟺ $\exists\, w \in V.\ \forall\, u' \in V.\ \forall\, v' \in V.$
もし $(u',v') = (u,w)$または(w,v) ならば
$R(u',v',i)$

としてから展開

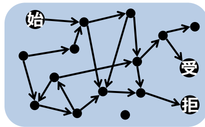
サヴィッチの定理

$O((\log n)^2)$ 空間

NPSPACE = PSPACE　　**NL ⊆ L²**

多項式
対数 空間乱択機械の
時点表示グラフ $G_{M,x} = (V,E)$

頂点数 $|V| = 2^{\mathrm{poly}(|x|)}$
$\mathrm{poly}(|x|)$



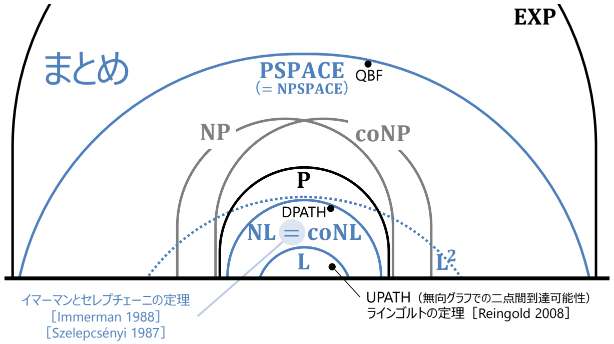
「u から v へ長さ 2^i 以下の路あり」を $R(u,v,i)$ と書くと

$R(u,v,i+1)$ ⟺ 或る $w \in V$ が存在して
$R(u,w,i)$ かつ $R(w,v,i)$

$R(u,v,0)$ ⟺ $u = v$ または $(u,v) \in E$

これを再帰的に使って R(始, 受, $\lceil \log|V| \rceil$) を計算

➡ 空間量 $O(\lceil \log|V| \rceil^2)$



未解決　**L $\overset{?}{=}$ P**
P $\overset{?}{=}$ PSPACE

終

定義（復習）

判定問題 A から B への（多対一）帰着 T とは
$A(x) = B(T(x))$ なるもの

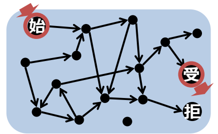
定理

「多項式時間」では
意味ないので

DPATH は（対数空間帰着について）**NL** 完全

すなわち任意の $A \in$ **NL** は DPATH への対数空間の帰着をもつ

与えられた x を



$G_{M,x}$

に変換すればよい