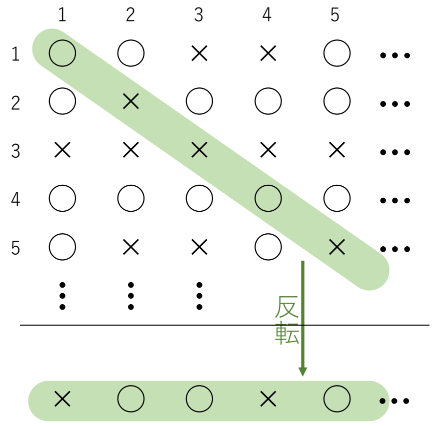
第二日
機械の万能性と限界

対角線論法



番号１２３…をつけて無限に

左図のように
○と×を横に並べたものを○×行と呼び
○×行を縦に並べたものを○×表と呼ぶ

どちらが正しいでしょうか？

~~うまく○×表を作ると
あらゆる○×行が現れるようにできる~~

如何なる○×表に対しても
それに現れない○×行が存在する

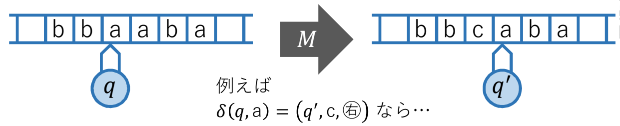
∵　左図のように　対角線上の内容と
喰い違うように定義すればよい

再

まとめ　第一日　問題と機械

- 問題＝言語　無限個の入力に正解を定めたもの
- 機械＝算法　有限に記述される計算手順
- 有限状態機械（書込み機能なし）により認識される　＝　正則
- チューリング機械（書込み機能あり）により認識される
  ＝　認識可能　≒　「計算できる」
- 正則でないが認識可能である言語が存在する

再



例えば
$\delta(q, \mathrm{a}) = (q', \mathrm{c}, ㊨)$ なら…

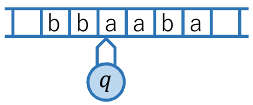
定義

チューリング機械は次のものにより指定される
- 有限個の**状態**の集合 Q　但し次のものが定まっている
  - 始状態 $q_{始} \in Q$
  - 受理状態の集合 $Q_{受理} \subseteq Q$
- 有限個の**文字**の集合 Σ　これと空白文字 ␣ を含む集合 $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{␣\}$
- **遷移規則** $\delta : Q \times \Gamma \to \big(Q \times \Gamma \times \{㊧, ㊨\}\big) \cup \{止\}$

初め機械は始状態 $q_{始}$ にあり　テープ上に与えられた文字列 $x \in \Sigma^*$ の左端から始めて　次のこと（遷移）を繰返す
　状態 $q \in Q$ で文字 σ を読むと　$\delta(q, \sigma)$ が
- 「止」ならば停止する
- (q', σ', d) なら　状態を q' にし σ' を書込み d の向きに一歩進む

$Q_{受理}$ に属する状態で停止したら機械は x を**受理**したという

これを厳密に定義すると……

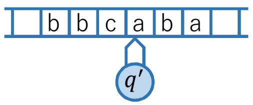


この状況を　 bb$q$aaba
のように表すことにする

$\xrightarrow{M}$

状況の遷移

例えば $\delta(q,\mathrm{a}) = (q',\mathrm{c},㊨)$ なら…



次の状況　bbcq'aba

Γ^* の文字列の途中に Q の元がちょうど 1 回だけ現れる文字列を**状況**と呼び（但し先頭や末尾に ␣ を加えた文字列も同じ状況とみなす）状況の遷移 $\xrightarrow{M}$ を次で定義する
状態 $q \in Q$ と文字 $\sigma \in \Gamma$ に対し

- もし $\delta(q,\sigma) = (q',\sigma',㊧)$ ならば　任意の $u,v \in \Gamma^*$ と $\tau \in \Gamma$ に対し $u\tau q\sigma v \xrightarrow{M} uq'\tau\sigma' v$
- もし $\delta(q,\sigma) = (q',\sigma',㊨)$ ならば　任意の $u,v \in \Gamma^*$ に対し $uq\sigma v \xrightarrow{M} u\sigma' q' v$

文字列 $x \in \Sigma^*$ を機械 M が**受理**するとは
状況の有限列 $(s_0,\dots,s_f)$ であって次を満すものが存在することをいう

- $s_0 = q_{始}x$
- $s_0 \xrightarrow{M} s_1 \xrightarrow{M} s_2 \xrightarrow{M} \cdots \xrightarrow{M} s_f$
- s_f には $\delta(q,\sigma) =$ **止** かつ $q \in Q_{受理}$ なる $q\sigma$ が現れる

再

チャーチとチューリングの定立

「計算できる」（機械的な手順で解ける）＝（チューリング機械で）認識可能

ボンヤリした概念

数学的にハッキリ定義した概念

チューリング機械ですべての「計算」が実現できているなんて本当？

幾つかの理由から　今では広く受入れられています

- 現実の計算に出て来そうな色々な手順は
確かにチューリング機械で書けるようだ（経験上）
- 他の様々なやり方で定義された計算可能性の概念とも一致

でも文字列に関する問題しかないの？

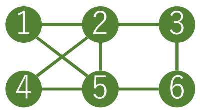
入力を**符号化**する方法を決めた上で文字列に関する問題として扱います

問題 PRIME　与えられた正整数（十進法で書く）が素数か

0 1 … 9 からなる文字列

問題 HAMILTON　与えられたグラフ（次のような形式で書く）がハミルトン閉路をもつか
（全頂点を一度づつ通る辿り方）

0 1 … 9 ( ) , からなる文字列



符号化 →

6,(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,6),(4,5),(5,6)

※ それなりに常識的な符号化法なら計算量の議論に支障ないことが多いので
今後あまり明記しないこともある

機械は文字列で表せる

万能機械

チューリング機械は（有限の）文字列で記述できる
遷移規則 $\delta(q,\sigma) = (q',\sigma',d)$ が有限個あるだけ

その文字列（算譜（プログラム））を機械と呼ぶと思ってもよい

このお蔭で　各機械を実際に建造せずとも
算譜を読込むことで同じ機能を実現できる

ε
0
1
00
01
10
11
000
001
010
011
100
101
110
111
0000
0001
0010
0011
0100
0101

すべての機械はこのどこかに現れる

問題 EVAL	
入力	二つの文字列の組 (M,x)
答	機械 M は入力 x を受理するか

「算譜を実行する」問題

定理
EVAL は認識可能

EVAL を認識するチューリング機械を「万能チューリング機械」という

証明（？）「チャーチとチューリングの定立」に頼ると……
昨日の講義中にやったように
チューリング機械（を表す図）を見ながらそれを実行することは
機械的作業である（ので同じことをチューリング機械でできる筈だ）

しかし　機械が有限の文字列で表せることから

認識可能でない言語

を構成することもできてしまう

	ε	0	1	00	01	x
ε	○	○	×	×	○	…
0	○	×	○	○	○	…
1	×	×	×	×	×	…
00	○	○	○	○	○	…
01	○	×	×	○	×	…
M	⋮	⋮	⋮			

反転

×	○	○	×	○	…

図のように

文字列に対応づけて無限に

○と×を横に並べたものを○×行と呼び

○×行を縦に並べたものを○×表と呼ぶ

定理

どんな○×表に対しても
それに現れない○×行が存在する

∵　左図のように　対角線上の内容と
喰い違うように定義すればよい

各行を機械の動作と考えると……

（チューリング機械 M が入力 x を受理するか否かを第 (M,x) 成分に○×で記した表にこの定理を適用）

どの機械でも認識されない言語

今の議論で結局　何という問題が認識不能と示されたのか

問題			
問題 EVAL	入力	二つの文字列の組 (M,x)	**認識可能**
	答	機械 M は入力 x を受理するか	
問題 $\overline{\text{EVAL}}$（EVAL の補集合）	入力	二つの文字列の組 (M,x)	**認識可能でない**
	答	機械 M は入力 x を受理**しない**か	
対角線論法で作った問題	入力	文字列 x	**認識可能でない**
	答	機械 x は入力 x を受理**しない**か	

EVAL は認識可能だが**判定**可能ではない

任意の入力 x に対し
- もし $x \in$ EVAL ならば x を受理（して停止）
- もし $x \notin$ EVAL ならば x を**受理せずに停止**

すること

M に x を入力した計算が
停止しないことを
有限の時間で確実に
予言する方法はない

問題 SR

入力　書換え規則の（有限）集合 R と文字列 $w \in \Sigma^*$
R の各規則は $u \to v$ という形（$u, v \in \Sigma^*$）
文字列の一部を u から v に書換えることができるという意味

つまり $xuy \Rightarrow_R xvy$ とできる

答　R による書換えを次々と w に施して ε（空文字列）にできるか

$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ と書くことにする

例 1

入力
R: aa → bbb, aba → a, bb → ε
w = aababab

答　○（受理）

（aababab $\Rightarrow_R$ aabab $\Rightarrow_R$ aab $\Rightarrow_R$ bbbb $\Rightarrow_R$ bb $\Rightarrow_R$ ε とできるので）

例 2

入力
R: aa → bab, aba → a, bb → ε
w = aababab

答　×（不受理）

（a を消せる規則がないので）

問題 SR

入力　書換え規則の（有限）集合 R と文字列 $w \in \Sigma^*$
R の各規則は $u \to v$ という形（$u, v \in \Sigma^*$）
文字列の一部を u から v に書換えることができるという意味

つまり $xuy \Rightarrow_R xvy$ とできる

答　R による書換えを次々と w に施して ε（空文字列）にできるか

$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ と書くことにする

例 1

入力
R: aa → bbb, aba → a, bb → ε
w = aababab

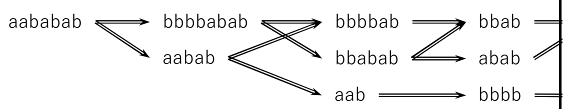
答　○（受理）

（aababab $\Rightarrow_R$ aabab $\Rightarrow_R$ aab $\Rightarrow_R$ bbbb $\Rightarrow_R$ bb $\Rightarrow_R$ ε とできるので）

定理

SR は認識可能

書換え 1 回で作れる文字列をすべて列挙（ε があれば受理）
書換え 2 回で作れる文字列をすべて列挙（ε があれば受理）
……と順に調べてゆけばよい



（この方法では $w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ でないときは計算が停止しない）

実は SR は判定可能でないことが後で判る

その前にまず　二つの似た問題のどちらが
より判定可能でありそうか比べる論法（**帰着**）について考えよう

問題 SR
- 入力：書換え規則の集合 R と文字列 w
- 答：R による書換えを次々と w に施して空文字列にできるか

問題 SR′
- 入力：書換え規則の集合 R と文字列 w, w'
- 答：R による書換えを次々と w に施して w' にできるか

どちらが
より難しい？

問題の難しさの比較（**帰着**）

これが解ければ　こっちも解ける

問題 SR
- 入力：(R, w)
- 答：$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ か

帰着 →

問題 SR′
- 入力：(R, w, w')
- 答：$w \Rightarrow_R^* w'$ か

入力

(R, w) ⋯⋯→ (R, w, ε)

が SR に属するか知りたい

そのためには

が SR′ に属するか調べれば良い

$$(R, w) \in \mathrm{SR} \quad \Leftrightarrow \quad (R, w, \varepsilon) \in \mathrm{SR}'$$

問題の難しさの比較（**帰着**）

これが解ければ　こっちも解ける

問題 SR
- 入力：(R, w)
- 答：$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ か

← 帰着

問題 SR′
- 入力：(R, w, w')
- 答：$w \Rightarrow_R^* w'$ か

入力

$(R \cup \{\blacktriangleright w' \blacktriangleleft \to \varepsilon\}, \blacktriangleright w \blacktriangleleft)$ ←⋯⋯ (R, w, w')

（▸ と ◂ は新たな文字）

が SR′ に属するか知りたい

$$(R \cup \{\blacktriangleright w' \blacktriangleleft \to \varepsilon\}, \blacktriangleright w \blacktriangleleft) \in \mathrm{SR} \quad \Leftrightarrow \quad (R, w, w') \in \mathrm{SR}'$$

二つの問題は（決定可能かどうかに関しては）
「同じ難しさ」であることが判った！

問題の難しさの比較（**帰着**）

問題 SR
- 入力：書換え規則の集合 R と文字列 w
- 答：R による書換えを次々と w に施して空文字列にできるか

↓帰着　↑帰着（前頁）

問題 SR′
- 入力：書換え規則の集合 R と文字列 w, w'
- 答：R による書換えを次々と w に施して w' にできるか

↓帰着　↑帰着

演習　この帰着（SR″ も同じ難しさであること）を示して下さい

問題 SR″
- 入力：書換え規則の集合 R と文字列 w, w''
- 答：R による書換えを次々と w に施して w'' が現れる文字列にできるか

定理

SR は判定可能でない（$\overline{\mathrm{SR}}$ は認識可能でない）

これが判定不能と判っているので　　これも　　これも判定不能

∵ 右図の帰着による

問題 EVAL →（帰着）→ 問題 SR″ →（前頁）（帰着）→ 問題 SR

(M,x) ⇢ $(R, \blacktriangleright q_{始} x \blacktriangleleft, 受)$

但し R は　M の各状態 $q \in Q$ と文字 $\sigma \in \Gamma$ について次の規則を加えて作る

- もし $\delta(q,\sigma) = (q', \sigma', ㊧)$ ならば　任意の $\tau \in \Gamma$ に対し規則 $\tau q \sigma \to q' \tau \sigma'$
- もし $\delta(q,\sigma) = (q', \sigma', ㊨)$ ならば　規則 $q\sigma \to \sigma' q'$
- もし $\delta(q,\sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ ならば　規則 $q\sigma \to$ 受

また　規則 $\blacktriangleright \to \blacktriangleright ␣$ および規則 $\blacktriangleleft \to ␣ \blacktriangleleft$ も R に含める　すると

$(M,x) \in$ EVAL ⇔ 状況 $q_{始} x$ から遷移 M を辿ってゆくと $\delta(q,\sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ なる $q\sigma$ が現れる状況に到達

⇔ 文字列 $\blacktriangleright q_{始} x \blacktriangleleft$ に R の規則を施して 受を含む文字列に辿り着ける（すなわち $(R, \blacktriangleright q_{始} x \blacktriangleleft, 受) \in$ SR″）

ヒルベルトの判定問題

一階述語論理で書かれた文が与えられたとき
それが正しい（＝証明可能）か否かを判定する
ような機械的な手順はあるか？ (1928)

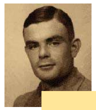
A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2, **42**: 230–265, 1936.

正しい文であるかどうかを判定！

文（論理式）→ の機械 → 受理 / 不受理

ヒルベルトの判定問題

一階述語論理で書かれた文が与えられたとき
それが正しい（＝証明可能）か否かを判定する
ような機械的な手順はあるか？ (1928)



A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2, **42**: 230–265, 1936.

もしあるとすると先程の EVAL が判定できてしまうので、無い

(M,x) ⇢ 変換（帰着）→ 文 $\varphi_{M,x}$ → の機械 → 受理 / 不受理

「機械 M が入力 x を受理する」を表す文 $\varphi_{M,x}$ を作る

新五十ポンド紙幣（今年から）

まとめ　第二日　機械の万能性と限界

- 機械は有限の文字列（算譜）で記述できる
- 入力された算譜を実行する計算ができる（EVAL は認識可能）
- しかし EVAL は判定可能ではない（対角線論法）
- 様々な言語の判定不能性が帰着により示される