輪番割当 6 分の 5 予想の解決

河村彰星

概要：幾つかある仕事のそれぞれについて，連続する〇〇日には必ず一度以上やるべしという日数が指定されている．これを満し続けながら毎日いずれか一つだけ仕事をしたい．勿論これが可能であるには指定された日数の逆数の和が 1 以下である必要がある．一方この逆数和が 6 分の 5 以下なら十分である，という陳と錢(1993)の予想が示されたので報告する．証明は有限個の場合を計算機で確かめることでなされた．この有限個で十分であることは，日数を整数から実数へ適切に拡張する議論により示される．

1. はじめに

各仕事 $i \in [k] = \{1, \ldots, k\}$ を必ず a_i 日に一度以上は行うという条件を満しつつ，毎日いずれか一つだけ仕事をしたい，という**輪番割当**（pinwheel scheduling）問題[11]を考える．つまりこの問題の個例（instance）は正整数が昇順に並んだ空でない列 $A = (a_i)_{i\in[k]}$ であり，これに対し**日割**（schedule）$S\colon \mathbb{Z} \to [k]$ をうまく作って各 $i \in [k]$ で

任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，日 $t \in [m, m + a_i) \cap \mathbb{Z}$ が存在して $S(t) = i$

という**頻度条件**を満したい．以下 a_i を仕事 i の**周期**と呼び，適する日割が存在するとき A は**割当可能**と言う．例えば $(3, 3, 3)$ や $(2, 4, 8, 8)$ や $(3, 4, 5, 8)$ は割当可能だが，各要素を少しでも減らすと割当不能になる．$(3, 4, 5, 8)$ の日割 $S\colon \mathbb{Z} \to [4]$ の一つは次で与えられる．

$$S(t) = \begin{cases} 1 & t \equiv 0,\ 3,\ 6 \pmod 8 \text{ のとき} \\ 2 & t \equiv 1,\ 5 \text{ のとき} \\ 3 & t \equiv 2,\ 7 \text{ のとき} \\ 4 & t \equiv 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

個例 $A = (a_i)_{i\in[k]}$ が割当可能であるには明らかに，**密度**（density）

$$\mathrm{D}(A) = \sum_{i\in[k]} \frac{1}{a_i}$$

が 1 以下である必要がある．これは十分条件ではない．例えば $(2, 3, a_3)$ は a_3 が如何に大きくとも割当不能である．一方，密度が $\frac{1}{2}$ 以下なら割当可能であることは比較的容易に判る[11，Corollary 3.2]．「密度〇〇以下ならば割当可能」という十分条件をこの $\frac{1}{2} = 0.5$ よりも大きな値で示すことが目指され，順次 $0.666\ldots$ [6]，0.7 [5，Theorem 4.2]，0.75 [8，Theorem 1]に改善されて来た．真の限界は $\frac{5}{6} = 0.833\ldots$ と予想[6]されており（上述の $(2, 3, a_3)$ によりこれが最良である），この予想は A に現れる相異なる周期が 3 種類以下のとき[16，Theorem 4]，各種類の仕事が 5 個づつ以上あるとき[4，Theorem 3]，$a_1 = 2$ のとき[8，Theorem 2]，仕事の個数 k が 12 以下のとき[10]については確かめられていた．

本稿ではこの予想の肯定的解決を報告する．すなわち

定理 1 正整数からなる個例 A が $\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ を満すならば，A は割当可能．

わざわざ「整数」と断ったのは，本稿では次節において周期を整数から一般の正実数に拡張するからである．この拡張を適切に行うことが定理 1 の証明に重要な役割を果す．

なお密度 1 以下という明らかな必要条件は，仕事が二種類しかない場合に限れば十分条件でもあると判っている[12，Corollary 4.9]．この事実も上述の一般化に基づく手法で（周期が整数に限らずとも）簡単に示せる．すなわち

定理 2 もし $\mathrm{D}(A) \le 1$，かつ A に現れる相異なる周期が 2 種類以下ならば，A は割当可能．

以下 1.1 節で割当可能性の判定について触れ，1.2 節で関連研究を挙げる．2 節で輪番割当を非整数の周期へ拡張し，その基本的な性質を述べる（定理 2 はこれにより簡単に証明される）．この拡張を用いて 3 節で主定理 1 を証明する．

1.1 割当可能性の判定

個例 $A = (a_i)_{i\in[k]}$ の割当可能性は次のように調べられる[11，Theorem 2.1]．集合 $\mathcal{U}_A = \prod_{i\in[k]}\{0, \ldots, a_i - 1\}$ の元を**状態**という．仕事 $j \in [k]$ と二状態 $u = (u_i)_{i\in[k]}$，$u' = (u'_i)_{i\in[k]} \in \mathcal{U}_A$ の間の関係 $u \vdash^j u'$ を

$$u'_i = \begin{cases} a_i - 1 & i = j \text{ のとき} \\ u_i - 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

で定義し，そのような j が存在することを $u \vdash u'$ で表す．状態 $u = (u_i)_{i\in[k]} \in \mathcal{U}_A$ は「各仕事 i を明日から u_i 日以内にする必要がある」ことを表し，$u \vdash^j u'$ は「状態 u だった日に仕事 j を行うと翌日は状態 u' になる」と読める．A が割当可能であるには，$\mathcal{U}_A$ を頂点集合とし $\vdash$ を（有向）辺集合とする**状態グラフ**が無限の歩をもつことが必要十分である．$\mathcal{U}_A$ は有限だから，これは閉路をもつことと言っても同じである．これは多項式空間で確かめられる条件だが[11, Corollary 2.2]，$\mathcal{U}_A$ の大きさは一般に入力 A の記述長に対して指数的になり得る．輪番割当可能性の判定が NP に属するか否かは判っていない．

この考察から，割当可能な個例は特に有限長の仕事の並びをずっと循環する形の日割をもつことが判る．以下で算法が解となる日割を出力すると言うときは，そのような解の循環節を書き出すと考えればよい．

1.2 関連研究

一定以上の頻度で永続的に守備，監督，保守を行おうとする形の問題の中でも，輪番割当は優れて基本的な設定といえよう．一般化としては，毎日一つでなく一定数の仕事を行える[1, 2]とか，仕事の実行一回に単位時間でなく仕事ごとに異なる時間がかかる[7]といった設定がある．仕事間に距離があり移動に時間がかかるとする警邏（patrolling）の研究も多い[14]．本稿では割当可能か否かのみを主に扱っているが，輪番割当から生ずる自然な最適化問題として竹叢伐採（bamboo garden trimming）[9]などがある．

輪番割当の頻度条件では任意の日 m から始まる期間 $[m, m+a_i)$ に仕事 i を行うことを要求したが，これを初日 m が a_i の倍数である期間のみに課する設定は周期的割当（periodic scheduling）[3, 4, 17]と呼ばれ，各期間中の仕事の配置を前後の期間とは独立に考えてよいので話が簡単になる．仕事 i を連続する a_i 日間に「一度以上」ではなく「ちょうど一度」行う問題[13, 18, 19]も考えられる．

本稿で考えた「詰込（packing）」型（仕事全体を $\mathbb{Z}$ に収容する）の設定とは逆に，仕事 i を a_i 日に一度以下しか行えないとする「被覆（covering）」型の問題についても定理 1 と同様の予想（密度 1.264... 以上の整数周期列は $\mathbb{Z}$ を被覆可能）があり未解決である[15]．

2. 非整数の周期

先述のように，本稿の議論に重要なのが，各仕事の周期を整数から実数へ拡張することである．今後，周期 a_i は「どの r 日間にも $\lfloor r/a_i \rfloor$ 度以上」という頻度条件，すなわち

　任意の $r \in \mathbb{N}$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$\lfloor r/a_i \rfloor$ 個以上の $t \in [m, m+r) \cap \mathbb{Z}$ で $S(t) = i$

を表すことにする．この「任意の r」を $r = a_i$ に限ったのが冒頭の「どの a_i 日間にも一度以上」という条件であり，a_i が整数ならどちらも同義だが，非整数では意味が違ってくる．例えば周期 3.5 の仕事は「どの 4 日間にも 1 度以上」かつ「どの 7 日間にも 2 度以上」やらねばならない．これは毎週月・木曜日にやれば満されるが，単に 4 日ごとにやったり毎週月・水曜日にやったりしては満されない．

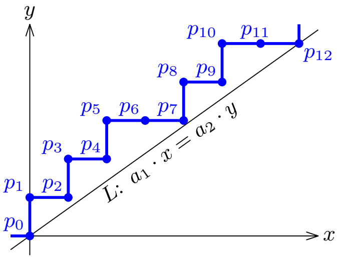

図 1　$a_1 = \frac{12}{7}$，$a_2 = \frac{12}{5}$ として，傾き a_1/a_2 の直線に沿って格子点上を進む道 $(p_t)_{t\in\mathbb{Z}}$．

頻度条件をこのように解釈し直す利点は，割当可能性の基本的性質であり従来研究でも陰に陽に用いられている次の補題が，周期を非整数にしても成立つことである．周期列 A と B の仕事を単に合せてすべて並べたものを $A \sqcup B$ で表す．例えば $(6,6) \sqcup (4,4,6) = (4,4,6,6,6)$ である．

補題 3　周期列 $A \sqcup (a)$ が割当可能ならば，

(1) 任意の周期 $b \geq a$ について，$A \sqcup (b)$ も割当可能（単調性）．

(2) 任意の正整数 q について，$A \sqcup (\underbrace{a \cdot q, \dots, a \cdot q}_{q})$ も割当可能（分割性）．

証明　(1) もと周期 a の仕事を行っていた日に新たな周期 b の仕事を行えばよい．

(2) もと周期 a の仕事を行っていた日に，新たな周期 $a \cdot q$ の仕事 q 個を順繰りに行えばよい．　□

これだけの準備で定理 2 が簡潔に示せるので（定理 1 には必要ないが）述べておく．

定理 2 の証明　補題 3 の分割性より仕事は各種類一つ，つまり $A = (a_1, a_2)$ で $1/a_1 + 1/a_2 \leq 1$ であるとしてよい．更に補題 3 の単調性より $1/a_1 + 1/a_2 = 1$ としてよい．各 $t \in \mathbb{Z}$ について，座標平面上の直線 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = t\}$ 上で直線 $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \cdot x = a_2 \cdot y\}$ との交点 $(t/a_1, t/a_2)$ のすぐ左上にある格子点を $p_t = (\lfloor t/a_1 \rfloor, \lceil t/a_2 \rceil)$ とする（図 1）．すると点列 $(p_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ は L に沿ってすぐ左上の格子点上を辿る道である．この道が横，縦に進むときにそれぞれ仕事 1，2 を行う日割 $S\colon \mathbb{Z} \to [2]$，すなわち

$$S(t) = \begin{cases} 1 & p_{t+1} - p_t = (1,0) \text{ のとき} \\ 2 & p_{t+1} - p_t = (0,1) \text{ のとき} \end{cases}$$

は，頻度条件を満す．実際，日 $m \in \mathbb{Z}$ からの連続する $r \in \mathbb{N}$ 日間に仕事 $i \in \{1,2\}$ の行われる回数は

$$p_{m+r} - p_m = \left(\left\lfloor \frac{m+r}{a_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{a_1} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m+r}{a_2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{a_2} \right\rceil \right)$$

の第 i 成分だが，これは確かに $\lfloor r/a_i \rfloor$ 以上である．　□

3. 定理 1 の証明

補題 3 を逆向きに用いて，割当不能な個例 A から，より小さい周期のみからなる割当不能な個例を作る次のような手順を考えよう．実数 $\theta > 0$ に対し，A に次の操作を繰返し施すと，毎回 θ を超える周期の個数が減るため必ず有限回で（第二の操作を最後に 0〜1 回行って）終るので，その結果として得られた（θ 以下の周期からなる）個例を $\mathit{fold}_\theta(A)$ とする．

- θ を超える周期が複数あれば，最も大きいものから二つを順に a，b とし，これらを一つの $b/2$ で置き換える．
- θ を超える周期が一つならば，それを θ で置き換える．

例えば $\mathit{fold}_{22}(2,5,14,40,55,72) = (2,5,13.75,14)$ である．

補題 4 任意の個例 A と任意の $\theta > 0$ に対し，
(1) もし A が割当不能ならば $\mathit{fold}_\theta(A)$ も割当不能である．
(2) $\mathit{fold}_\theta(A)$ のうち $\theta/2$ 以下の周期は，A と共通である．
(3) $\mathrm{D}(\mathit{fold}_\theta(A)) < \mathrm{D}(A) + 1/\theta$.

証明 A から $\mathit{fold}_\theta(A)$ を作るのに使った上記の各操作は，
(1) 補題 3 の逆操作で書けるから割当不能性を保ち，
(2) $\theta/2$ 以下の周期を生まず，
(3) 密度から最大周期の逆数を減じた差を増やさない． □

これにより，定理 1 の主張する個例 A の割当可能性を得るには，閾値 θ を設けて $\mathit{fold}_\theta(A)$ の割当可能性を確かめれば良いことになる．実際 $\theta = 22$ とするとうまくゆくことが，次の補題の通り有限個の個例を調べ尽すことで判る．

補題 5 $\mathrm{D}'(B) < \frac{5}{6} + \frac{1}{22}$ かつ各周期が 22 未満の整数であるような任意の個例 $B = (b_i)_{i\in[k]}$ は割当可能．但し

$$\mathrm{D}'(B) = \sum_{i\in[k]} \begin{cases} 1/b_i & b_i < 11 \text{ のとき} \\ 1/(b_i+1) & b_i \geq 11 \text{ のとき} \end{cases}$$

証明 該当する B は有限個であり，おのおのの割当可能性は 1.1 節の方法で判るから，調べ尽せばよい．その結果は

`www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kawamura/pinwheel/`

に掲げた．なおこれを得るための厖大な計算を効率化するのにゴンシェニェツら[10]の手法の一部が役立った． □

定理 1 の証明 密度 $\frac{5}{6}$ 以下の割当不能な整数個例 A が存在したとすると，$\mathit{fold}_{22}(A)$ も補題 4 より割当不能であり，11 以下の正整数と 11 以上 22 以下の実数とからなり，密度は $\mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{22}$ 未満である．$\mathit{fold}_{22}(A)$ の 11 より大きい周期 a を $\lceil a \rceil - 1$ に置き換えて得られる個例 B は，補題 3 の単調性から割当不能．一方この置換えで生じた各 $b \in B$ は 11 以上であり $\mathit{fold}_{22}(A)$ 中の $b+1$ 以下の数に由来するので $\mathrm{D}'(B) \leq \mathrm{D}(\mathit{fold}_{22}(A)) < \frac{5}{6} + \frac{1}{22}$．これは補題 5 に反する． □

なお補題 5 の「11」「22」を代りに「10」「20」とすると成立たない．例えば $(3,4,7,10,15)$ は割当不能だ（と 1.1 節の方法で判る）が $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{16} < \frac{5}{6} + \frac{1}{20}$ である．

謝辞 本研究は科研費 20H00587 の助成を受けた．

参考文献

[1] A. Bar-Noy and R. E. Ladner. Windows scheduling problems for broadcast systems. *SIAM Journal on Computing*, 32(4), 1091–1113, 2003.
[2] A. Bar-Noy, R. E. Ladner, and T. Tamir. Windows scheduling as a restricted version of bin packing. *ACM Transactions on Algorithms*, 3(3), Article 28, 2007.
[3] S. K. Baruah, N. K. Cohen, C. G. Plaxton, and D. A. Varvel. Proportionate progress: A notion of fairness in resource allocation. *Algorithmica*, 15(6), 600–625, 1996.
[4] S. K. Baruah and S. Lin. Pfair scheduling of generalized pinwheel task systems. *IEEE Transactions on Computers*, 47(7), 812–816, 1998.
[5] M. Y. Chan and F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. *IEEE Transactions on Computers* 41, 755–768, 1992.
[6] M. Y. Chan and F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. *Algorithmica* 9, 425–462, 1993.
[7] E. A. Feinberg and M. T. Curry. Generalized pinwheel problem. *Mathematical Methods of Operations Research*, 62, 99–122, 2005.
[8] P. C. Fishburn and J. C. Lagarias. Pinwheel scheduling: Achievable densities. *Algorithmica* 34, 14–38, 2002.
[9] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, and T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. *Journal of Computer and System Sciences* 139, 103476, 2024.
[10] L. Gąsieniec, B. Smith, and S. Wild. Towards the 5/6-density conjecture of pinwheel scheduling. In *Proc. SIAM Symposium on Algorithm Engineering and Experiments* (ALENEX), 91–103, 2022.
[11] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, and D. Varvel. The pinwheel: A real-time scheduling problem. In *Proc. 22nd Annual Hawaii International Conference on System Sciences*. Volume II, 693–702, 1989.
[12] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, and D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. *Theoretical Computer Science* 100, 105–135, 1992.
[13] A. P. Huhn and L. Megyesi. On disjoint residue classes. *Discrete Mathematics*, 41, 327–330, 1982.
[14] 河村彰星．最適の警邏に関する諸問題．数理解析研究所講究録 2027，85–92，平成 29 年．
[15] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. *Theoretical Computer Science* 839, 195–206, 2020.
[16] S. Lin and K. Lin. A pinwheel scheduler for three distinct numbers with a tight schedulability bound. *Algorithmica* 19, 411–426, 1997.
[17] C. L. Liu and J. W. Layland. Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard-real-time environment. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 20(1), 46–61, 1973.
[18] Z. Sun. On disjoint residue classes. *Discrete Mathematics*, 104, 321–326, 1992.
[19] W. D. Wei and C. L. Liu. On a periodic maintenance problem. *Operations Research Letters*, 2, 90–93, 1983.