輪番割当と密度

河村彰星

現代の数学と数理解析
令和6年5月17日

※ このスライドは PandA (課題のページ) にもあります

科研費
KAKENHI
JP20H00587
JP23K28036

最近書いた論文を
もとにした内容です

- 発表にも使ったスライドをほぼ流用
- 「数学の研究ってどうやるの？」

以下 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ とする

輪番割当問題 (詰込型) (pinwheel scheduling) [HMRTV89]

各仕事 $i = 1, 2, \dots, k$ は**どの連続する a_i 日にも一度以上**やる必要がある
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けることができるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は **(詰込) 割当可能**であるという

例

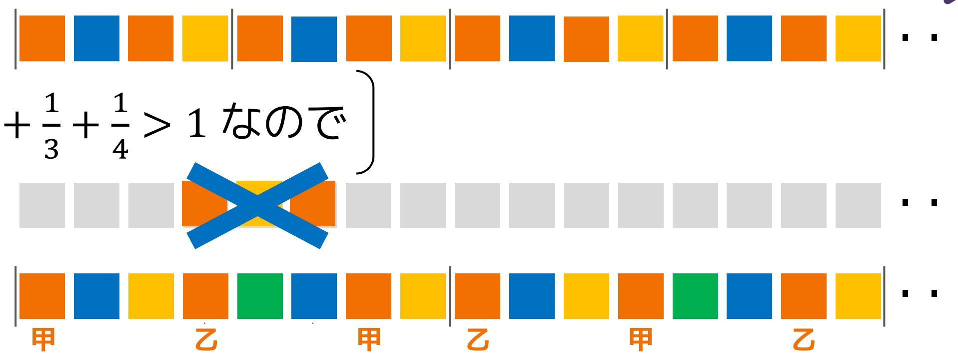
日数

$(2, 4, 4)$ 割当可能

$(2, 3, 4)$ 割当不可能 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ なので

$(2, 3, 100)$ 割当不可能

$(3, 4, 5, 8)$ 割当可能



$(3, 4, 6, 8)$ 割当可能

単調性 割当可能な組の或る数を
より大きい数に変えても割当可能

$(4, 5, 6, 6, 8)$ 割当可能
甲 乙

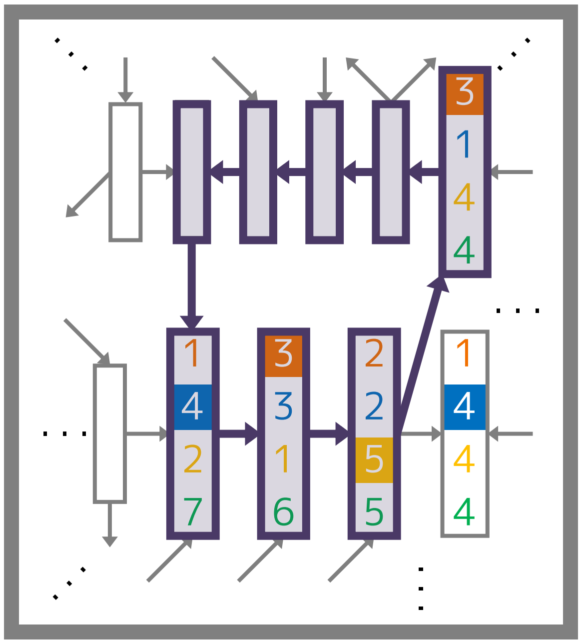
分割性 割当可能な組の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能
(一般に N 倍の数 N 個)

問1 $(3, 4, 6, 10, 16)$ は割当可能か。

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

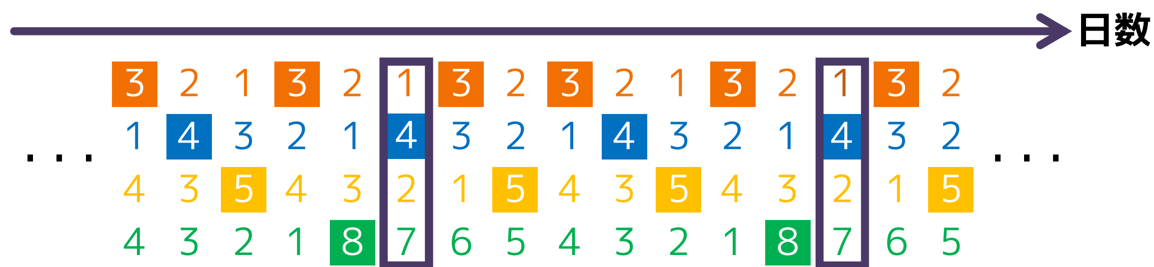
与えられた組が割当可能か判定するには？

状態遷移図を作り　閉路があるか調べればよい



$(3, 4, 5, 8)$ の状態遷移図

(頂点数 $\leq 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$)



状態
各仕事を「あと何日以内にやらねばならないか」を表す

これにより割当可能性は有限時間で判定できる

未解決　「効率よく」(多項式時間で) 判定できるか？

問2　与えられた $(a_1, \dots, a_k)$ の割当可能性をそこそこ速く $(a_k \leq 15$ なら数秒で) 判定するプログラムを書け。

競プロ勢向け

定義

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の**密度** (density) とは $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$

A が割当可能であるには明らかに $\mathrm{D}(A) \le 1$ が必要
これは一般には十分条件でないが……

$\frac{1}{2}$ よりも大きな数で成立つか？

定理 [HMRTV89]

A の各数が前の数の倍数で
かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば　A は割当可能

∵ 仕事が一種類の場合に帰着される

例 $(4, 8, 8, 16, 16)$ は割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4, 8, 8, 8)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4, 4, 4)$ 割当可能

定理 [HRTV92]

A に現れる数が二種類以内で
かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば　A は割当可能

系 [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

∵ 各項を 2 冪に切捨てても密度 ≤ 1

例 $(6, 12, 13, 24, 25)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{単調性}}$ $(4, 8, 8, 16, 16)$ 割当可能

うまく使うと切捨て時の無駄を
小さくできる (次頁の [CC93, CC92])

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲) [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

$(= 0.5)$

定理 [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{2}{3}$ ならば A は割当可能

$(= 0.666\ldots)$

定理 [CC92]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{7}{10}$ ならば A は割当可能

$(= 0.7)$

定理 [FL02]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{3}{4}$ ならば A は割当可能

$(= 0.75)$

定理 [Kaw24]

~~予想~~ [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なら A は割当可能

$(= 0.833\ldots)$

($(2, 3, \bullet)$ が割当不可能なのでこれが限界)

部分的解決

定理 [LL97]

A に現れる数が三種類以内なら成立

定理 [FL02]

$a_1 = 2$ なら成立

定理 [GSW22]

$k \le 12$ なら成立

$\boxed{}$ は計算実験を含む

[CC92] M.Y. Chan, F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. IEEE Transactions on Computers 41, 755–768, 1992.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, 14–38, 2002.

[GSW22] L. Gąsieniec, B. Smith and S. Wild. Towards the 5/6-density conjecture of pinwheel scheduling. In Proc. SIAM Symposium on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), pp. 91–103, 2022.

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

[Kaw24] 河村．輪番詰込の密度閾値について．情処研報2024-AL-196(1) (アルゴリズム研究会)，令和6年1月．

[LL97] S. Lin, K. Lin. A pinwheel scheduler for three distinct numbers with a tight schedulability bound. Algorithmica 19, 411–426, 1997.

輪番割当問題 (非整数への拡張)

1 以上の**実数**の組 $A = (a_1, \ldots, a_k)$ が与えられる
各仕事 i は**どの連続する $\lceil r \cdot a_i \rceil$ 日にも r 回以上**やる ($r = 1, 2, \ldots$)
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けられるか

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は　仕事 1 を

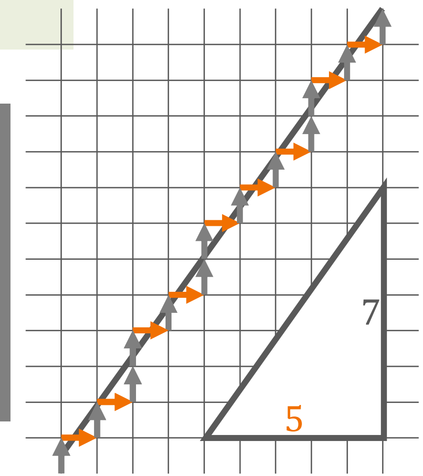
どの　3 日間にも 1 回以上
どの　5 日間にも 2 回以上
どの　8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上

行うべしという意味

これを満す一つの方法

傾き $\frac{7}{5}$ の直線に沿って
格子点上を右上に歩く
→ の所で仕事 1 を行う


$\cdots$



例 (2.4, 3.5, 3.5) は割当可能


$\cdots$

非整数に拡張してもやはり

単調性　分割性　は成立つ

密度は $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$ で定義

定理

$k = 2$ (すなわち $A = (a_1, a_2)$) かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば A は割当可能

∵ 次の「格子点と直線の方法」(と 単調性) より

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は 仕事 1 を

どの 3 日間にも 1 回以上
どの 5 日間にも 2 回以上
どの 8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上

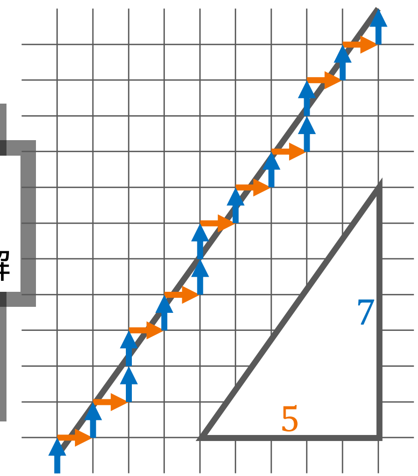
行うべしという意味

これを満す一つの方法

傾き $\frac{7}{5}$ の直線に沿って
格子点上を右上に歩く

→ の所で仕事 1 を行う

$\left\{\frac{12}{5}, \frac{12}{7}\right\}$ に対する解



縦横を入れ替えた議論により

↑ の所で仕事 2 を行うと $a_2 = \frac{12}{7}$ の条件を満す

系 (再掲) [HRTV92]

$A = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{k_2})$ (二種類の数からなる) かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば A は割当可能

∵ $\left(\frac{e_1}{k_1}, \frac{e_2}{k_2}\right)$ が割当可能ゆえ 分割性 より

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

計算機で調べ尽して確認
(先程の状態遷移図の方法)

補題

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は割当可能

$$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$$
$$\downarrow ①$$
$$(2, 5, 15, 40, \underline{51, 51})$$
$$\swarrow ②$$
$$(2, 5, 15, 25.5, 40)$$
$$\downarrow ①$$
$$(2, 5, 15, \underline{25.5, 25.5})$$
$$\swarrow ②$$
$$B = (2, 5, 12.75, 15)$$

※ 詳細は論文参照

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを次に大きい数 (か 22) まで減らす

② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \le \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (…

$\mathrm{D}(A) \leq$ …

補題

$\mathrm{D}(B) <$ …

割当可…

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

①

$(2, 5, 15, 40, \underline{51, 51})$

②

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

①

$(2, 5, 15, \underline{25.5, 25.5})$

②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

※ 詳細は論文参照

「補題…

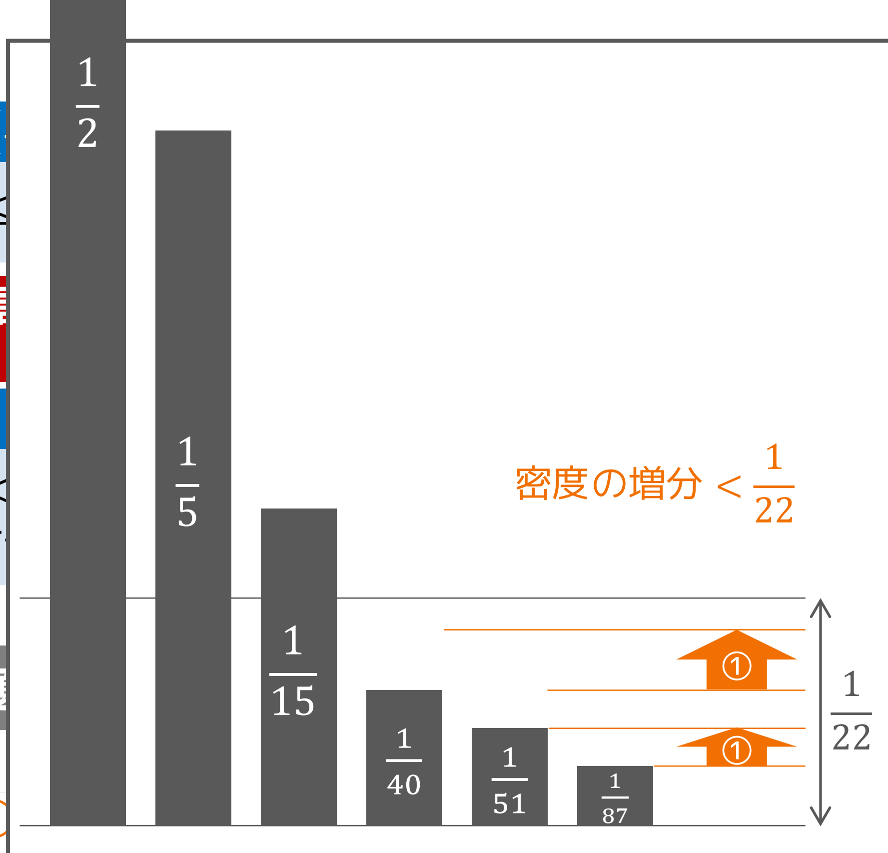
A の … 不可能だったとする

…繰返し　結果を B とする

① … 数 (か 22) まで減らす

②　A の最大元… であれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する



操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

計算機で調べ尽して確認
(先程の状態遷移図の方法)

補題

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は
各数を整数に切捨てても　割当可能

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

↓ ①

$(2, 5, 15, 40, \underline{51, 51})$

↙ ②

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

↓ ①

$(2, 5, 15, \underline{25.5, 25.5})$

↙ ②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

整数に切捨て

$(2, 5, 12, 15)$

※ 詳細は論文参照

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを次に大きい数 (か 22) まで減らす

② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \le \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆

未解決　計算機に頼らない証明を与えよ。

未解決　毎日 2 つ仕事ができるとしたら？

研究について (所感・雑談)

- 研究は先人の積み重ねの上に行うもの
  - 但し今回は考え始めて暫くの間　先行研究が見つけられなかった
    - 輪番割当はそこそこ有名なようだが　実質的に同じ問題が別の名前で扱われていたりする
  - 「未解決問題」は無数にある (重要なものも　しょぼいものも)
- すべてがうまくゆくことはほぼ無い
  - 本当は計算機に頼らない証明を得たかったが　できなかった
  - 多くの部分的結果が先行論文として書かれていたからこそできた
- 一つの題材にも様々な切り口
  - 与えられた $(a_1, \ldots, a_k)$ の割当可能性を判定する計算量は？
    - 先述の状態遷移グラフによる方法は　入力長に対する指数的な時間がかかる
    - 多項式時間でできるか不明　**NP** 困難か否かも不明
  - 当初の目標は果せなくても　何らかのことはできる
- 基礎研究と応用研究
  - 現実の事象は複雑　→数学的に抽象化・単純化した問題で考える
  - 輪番割当にも多くの関連する応用問題がある
    - 「割当可能か否か」だけでなく　頻度条件を「なるべく満す」最適化
    - より現実的な設定でヒューリスティクスの評価などをする研究も数多い
- 真面目な研究と一発ネタ研究

各仕事 i を「a_i 日**以内**に一度」ではなく「a_i 日**ちょうど**」を要求すると……

輪番きっかり割当問題 (詰込型) [WL83・Sun92]

与えられた正整数の組 $(a_1, \dots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \dots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{\, a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \,\}$ $(i = 1, \dots, k)$ を重なりなくできるか

できるとき組 $(a_1, \dots, a_k)$ は (詰込) **きっかり割当可能**であるという

例

$(2, 2)$　き割当可能

$(3, 5)$　き割当不可能 ($\because$ 中国剰余定理により必ずぶつかる)

$(4, 6)$　き割当可能 ($\because$ 次の仕事集合の一部なので)

$(4, 4, 6, 6, 6)$　き割当可能 ($\because$ $(2, 2)$ から 分割性 で得られるので)

$(4, 6, 10)$　き割当不可能 ($\because$ 偶または奇数日めに複数の仕事が入り　それらはぶつかる)

$(6, 6, 10, 10, 15)$　き割当可能

どの2行にも
相異なる列が
存在するように
記入できるか？
という問題

	2	3	5	
6	0	0		$[0, 0]_{2,3} = [0]_6$
6	0	1		$[0, 1]_{2,3} = [4]_6$
10	1		0	$[1, 0]_{2,5} = [5]_{10}$
10	1		1	$[1, 1]_{2,5} = [1]_{10}$
15		2	2	$[2, 2]_{3,5} = [2]_{15}$

きっかり割当可能性判定の計算量は
非きっかり型よりは良く判っている
（「**NP** 完全問題」であることが示せる）

[WL83] W.D. Wei, C.L. Liu. On a periodic maintenance problem. Operations Research Letters 2, 90–93, 1983.
[Sun92] Z. Sun. On disjoint residue classes. Discrete Mathematics 104, 321–326, 1992.

「詰込」でなく「被覆」

輪番割当問題 (被覆型) (point patrolling) [KS20]

各人 $i = 1, 2, \ldots, k$ は **連続する a_i 日に一度以下** しか働けない
これを満しながら毎日だれか一人づつを働かすことはできるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ は (被覆) **割当可能**であるという

例

$(2, 4, 4)$ 割当可能 $\cdots$  $\cdots$

$(2, 4, 5)$ 割当不可能 $\left(\because \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1\right.$ なので$\left.\right)$

$(2, 3, 4)$ 割当可能

$(2, 3, 5)$ 割当不可能

$(2, 3, 5, 9)$ 割当不可能

$\vdots$

$(2, 3, 5, 9, \ldots, 2^n + 1)$ 割当不可能 ← **問3** これを証明せよ。

単調性 割当可能な組の或る数を
より**小さい**数に変えても割当可能

分割性 割当可能な組の或る数を
N 倍の数 N 個に変えても割当可能

先程と同様に $\mathrm{D}(A) \geq 1$ は明らかに必要 $\mathrm{D}(A) \geq 2$ なら十分

定理 (未発表)

$\mathrm{D}(A) \geq \frac{113}{80}$ ならば A は割当可能
$(= 1.4125)$

予想 未解決

$\mathrm{D}(A) \geq \mathrm{D}(2, 3, 5, 9, \ldots)$ ならば A は割当可能
$(= 1.264\ldots)$

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

輪番きっかり割当問題 (被覆型)

与えられた正整数の組 $(a_1, \ldots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \ldots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{\, a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \,\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ が $\mathbf{Z}$ 全体を覆うようにできるか

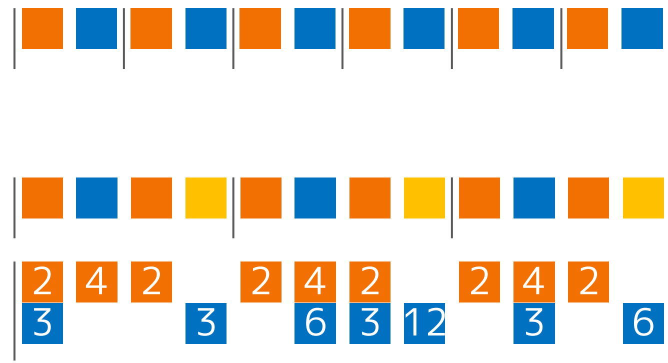
例

$(2, 2)$ き割当可能

$(2, 3, 3)$ き割当不可能

$(2, 4, 4)$ き割当可能

$(2, 3, 4, 6, 12)$ き割当可能



詰込型よりも難しそう

与えられた組 $(r_1, \ldots, r_k)$ が
条件を満すか判定する問題が既に
簡単でない

「相異なる $a_1, \ldots, a_k$ による被覆」についての
エルデシュの問題：

定理 [Hou15] ([Erd50] の予想を解決)

$10^{16} < a_1 < \cdots < a_k$ なる A はき割当不可能

[Hou15] B. Hough. Solution of the minimum modulus problem for covering systems. Annals of Mathematics 181, 361–382, 2015.
[Erd50] P. Erdős. On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. Summa Brasiliensis Mathematicae 2, 113–123, 1950.

まとめ

正整数の組 $A = (a_1, \dots, a_k)$ が与えられたとき
① 集合 $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbf{Z}$ であって
各 $i = 1, \dots, k$ と長さ a_i の任意の区間 I について
$|A_i \cap I|$ ② を満すものはあるか

詰込型	きっかり詰込型 (NP 完全)	
①互に交らない ② ≥ 1	①互に交らない ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \leq 1$ が必要
被覆型	**きっかり被覆型 (NP 困難)**	
① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② ≤ 1	① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \geq 1$ が必要

密度 $\mathrm{D}(A) = 1$ に制限すると　これら四問題は一致
(整数全体を重なりなく分割する問題 [Zná69])

予想 [KS20]
この問題すら
多項式時間では解けない

[Zná69] Š. Znám. On exactly covering systems of arithmetic sequences. Mathematische Annalen 180, 227–232, 1969.
[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

課題

スライド中の 問1 問2 問3 （または 未解決問題 ）のうち
1 問以上を解いて提出せよ

提出期限　5月31日 (金) 23:55

採点基準

できてる ➡ 4点
おしい ➡ 3点
できてない ➡ 0〜2点
すごい ➡ 5点

特に明快に記述されている
独自の鋭い考察がある
プログラムが一番速い　など