計算量理論

平成26年11月18日

代講　河村彰星（今井研助教）

先週の続きは次回

http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~kawamura/teaching/0510021/

乱択

乱数を利用した計算

例 与えられた整数係数多項式が零か判定

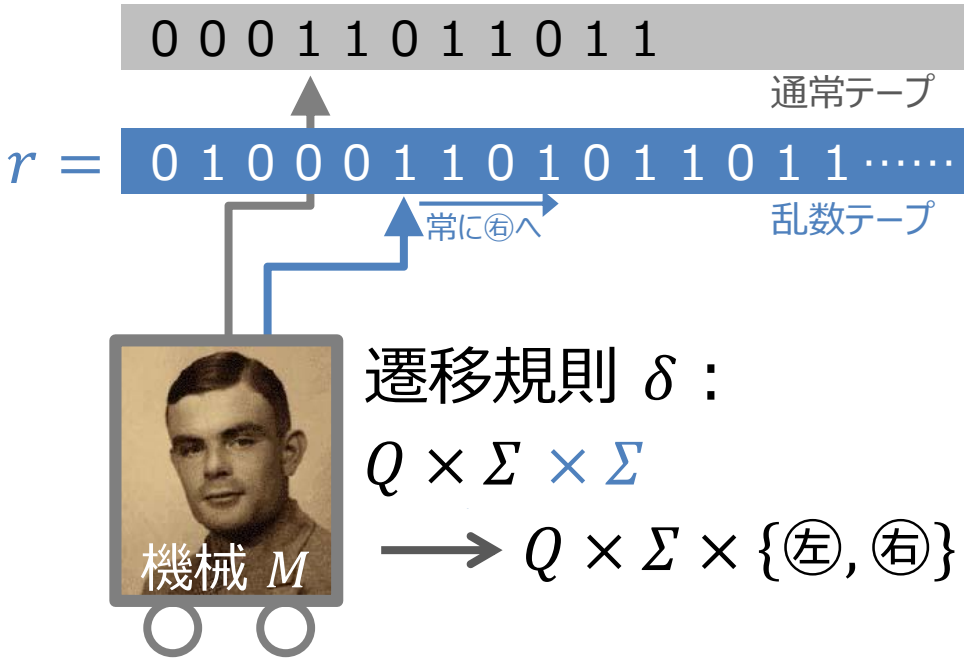
$$
\begin{aligned}
&(z-x)(x+y)(yy+zz)-xxyz\\
&+xy(z+x)(y-z)\\
&-(x-z)(xx+xy-yz)(x+y-z)\\
&+xyyz+(x+y)y(z-x+y)(x+y-z)\\
&-(x-z)(xy+xz+yz)(x+y-z)\\
&+(x-y)(x+z)(y+z)(y-z)+yyzz
\end{aligned}
$$

文字式のまま全部展開して計算 ➡ 大変

適当に数値を代入して計算し
0 になるか調べる
$(x, y, z) = (1,2,3)$ とか

➡ ラク（高速）
高確率で正解

非決定性（＝乱択）機械



遷移規則 δ：

$Q \times \Sigma \times \Sigma$

$\longrightarrow Q \times \Sigma \times \{㊧, ㊨\}$

計算結果

$M(x, r)$

入力　乱数　に依存

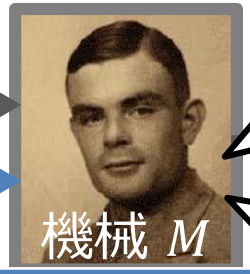
次の遷移を複数の分岐から
非決定的に（等確率で）選ぶ

＝

初めに「乱数テープ」上に
乱数列が~~無限に~~供給される

$\tau(|x|)$ ビットで十分

時間量が $\tau: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とは
任意の x と**任意の r について**
$\tau(|x|)$ 時間以内で停止すること



片側誤り
誤受理なし
誤拒否あり

定義

randomized の R

判定問題 A が級 **RP** に属するとは
或る多項式時間（乱択）機械 M が存在し
任意の入力 x に対し

「> 0」にすると **NP**

$A(x) =$ 真 のとき $M(x,r)$ は**確率** $> \frac{1}{2}$ **で**受理

$A(x) =$ 偽 のとき $M(x,r)$ は**必ず**拒否

$\frac{1}{2}$ の代りに $\frac{99}{100}$ にしたければ…

$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{RP} \subseteq \mathbf{NP}$$

乱数を独立に 7 回取って $r_1, \cdots, r_7$
$M(x,r_1), \cdots, M(x,r_7)$ のうち一つ以上が受理したら受理

注意

NPとかRPとかの定義について

「多項式時間で決定的に解けるのが **P**」

定義	定義
機械が**決定的** **多項式時間限定**であるとは…	機械 M が問題 A を **計算する**とは…

➡ **P**

「多項式時間で非決定的に解けるのが **NP**」

定義	定義
機械が**非決定的** **多項式時間限**であるとは…	M が問題 A を は…

こうではない

➡ **NP**

「多項式時間で乱択で解けるのが **RP**」

定義	定義
機械が**乱択的** **多項式時間限**であるとは…	M が問題 A を は…

こうではない

➡ **RP**

注意

NPとかRPとかの定義について

「多項式時間で決定的に解けるのが **P**」

定義	定義
機械が **多項式時間限定**であるとは…	機械 M が問題 A を **計算する**とは…

⇒ **P**

「多項式時間で非決定的に解けるのが **NP**」

定義	定義
非決定性機械が **多項式時間限定**であるとは…	機械 M が問題 A を **●●●する**とは…

⇒ **NP**

「多項式時間で乱択で解けるのが **RP**」

定義	定義
非決定性機械が **多項式時間限定**であるとは…	機械 M が問題 A を **▲▲▲する**とは…

⇒ **RP**

↑こっちは殆ど同じ　　↑ここを変える

他にも色々

BPP

ZPP

PP

UP

#P

⋮

問題 与えられた整数係数多項式 $p(X_1, \ldots, X_m)$ が **非零**であるか判定せよ

P に属するかは未解決だが　次の算法により **RP** に属する
（多項式**零判定**が **coRP** に属する）

算法 数 $r_1, \ldots, r_m \in \{1, \ldots, 2d\}$ を一様独立に乱択し
$p(r_1, \ldots, r_m) \neq 0$ ならば受理

d は p の全次数

➡ p が零なら確実に拒否
非零なら次の補題により確率 $> \frac{1}{2}$ で受理

補題

全次数 d の非零多項式 p について

$$\Pr[\,p(r_1, r_2, \ldots, r_m) \neq 0\,] \geq 1 - \frac{d}{B}$$

但し確率は $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \{1, \ldots, B\}$ を無作為に取ったもの

証明

m に関する帰納法　$m > 0$ とする　X_1 の次数を i として

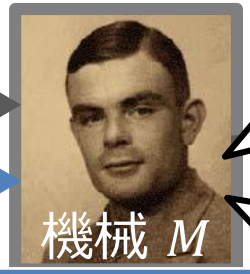
$$p(X_1, X_2, \ldots, X_m) = X_1^i \cdot q(X_2, \ldots, X_m) + (X_1\text{の低次の項})$$

と書く　帰納法の仮定より $\Pr[\,q(r_2, \ldots, r_m) \neq 0\,] \geq 1 - \frac{d-i}{B}$

もし □ ならば $p(X_1, r_2, \ldots, r_m)$ は

X_1 に関する i 次の非零な多項式で　その根は高々 i 個　故に

$$\Pr[\square] \geq \Pr[\square] \cdot \left(1 - \frac{i}{B}\right) \geq \left(1 - \frac{d-i}{B}\right)\left(1 - \frac{i}{B}\right) \geq 1 - \frac{d}{B}$$



両側誤り
誤受理あり
誤拒否あり

定義

bounded probabilistic

判定問題 A が級 **BPP** に属するとは
或る多項式時間（乱択）機械 M が存在し
任意の入力 x に対し

$> \frac{1}{2}$ ではダメ

$A(x) =$ 真 のとき $M(x,r)$ は**確率** $> \frac{2}{3}$ **で**受理

$A(x) =$ 偽 のとき $M(x,r)$ は**確率** $> \frac{2}{3}$ **で**拒否

$\frac{2}{3}$ の代りに $\frac{99}{100}$ にしたければ…

乱数を十分な回数取って $r_1, \cdots, r_k$
$M(x,r_1), \cdots, M(x,r_k)$ の多数決で受理・拒否

RP ⊆ BPP
BPP = coBPP

無誤り（？）
誤受理なし
誤拒否なし

定義

zero-error

判定問題 A が級 **ZPP** に属するとは
或る多項式時間（乱択）機械 M が存在し
任意の入力 x に対し

$A(x) =$ 真 のとき $M(x,r)$ は**必ず**受理または「？」

$A(x) =$ 偽 のとき $M(x,r)$ は**必ず**拒否または「？」

「？」の確率は常に $< \frac{1}{2}$

繰返せば $< \frac{1}{100}$ にもできる

決着がつくまで繰返す → 時間の期待値 $\mathrm{poly}(|x|)$

定理

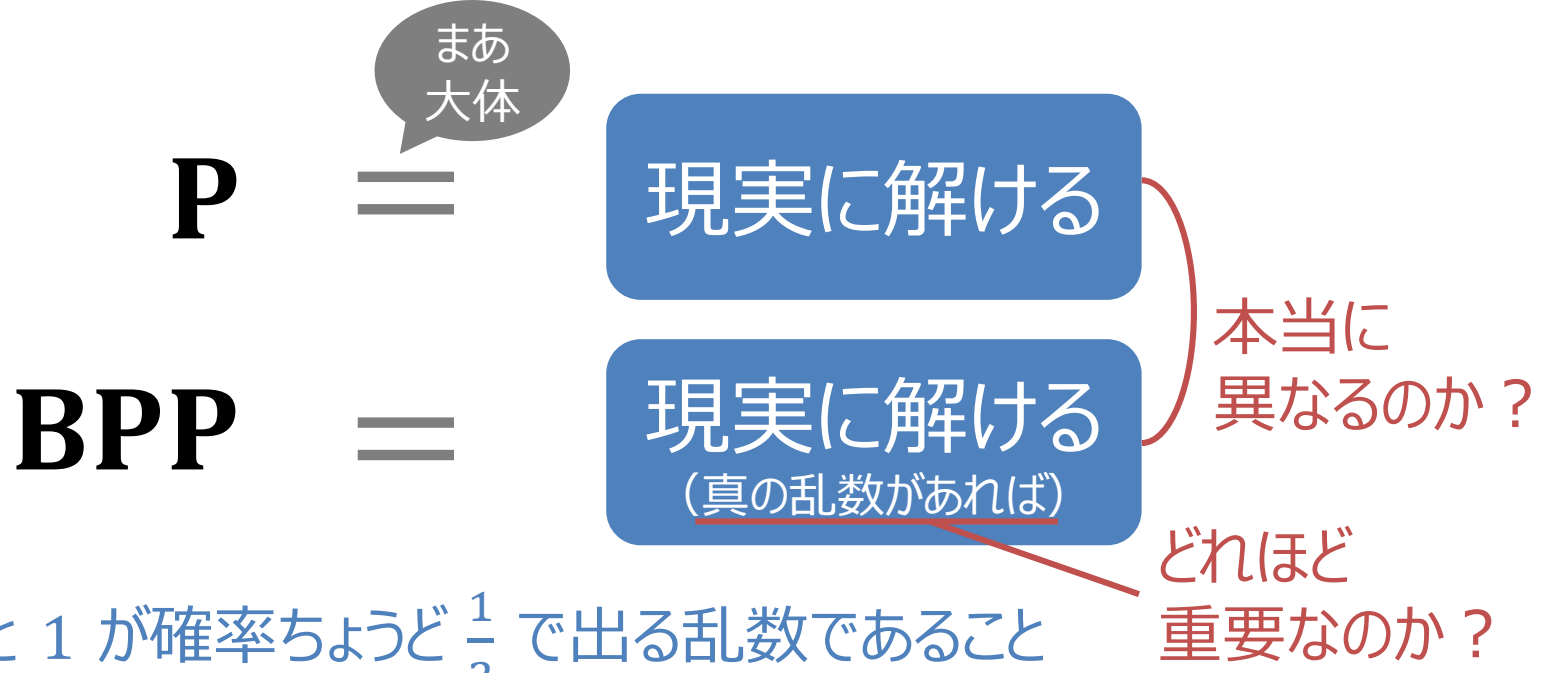
$$\mathbf{ZPP} = \mathbf{RP} \cap \mathbf{coRP}$$

証明

$\mathbf{ZPP} \subseteq \mathbf{RP}$　「？」の代りに拒否

$\mathbf{ZPP} \subseteq \mathbf{coRP}$　「？」の代りに受理

$\mathbf{RP} \cap \mathbf{coRP} \subseteq \mathbf{ZPP}$　両方の算法を実行してみて



0 と 1 が確率ちょうど $\frac{1}{2}$ で出る乱数であること

どうでもよい。例えば「$\frac{1}{100}$ ～ $\frac{99}{100}$ の未知の確率で 1 が出るとわかっている」乱数があれば何とかなる。

乱数の各ビットがそれなりに独立であること

或る程度は重要。

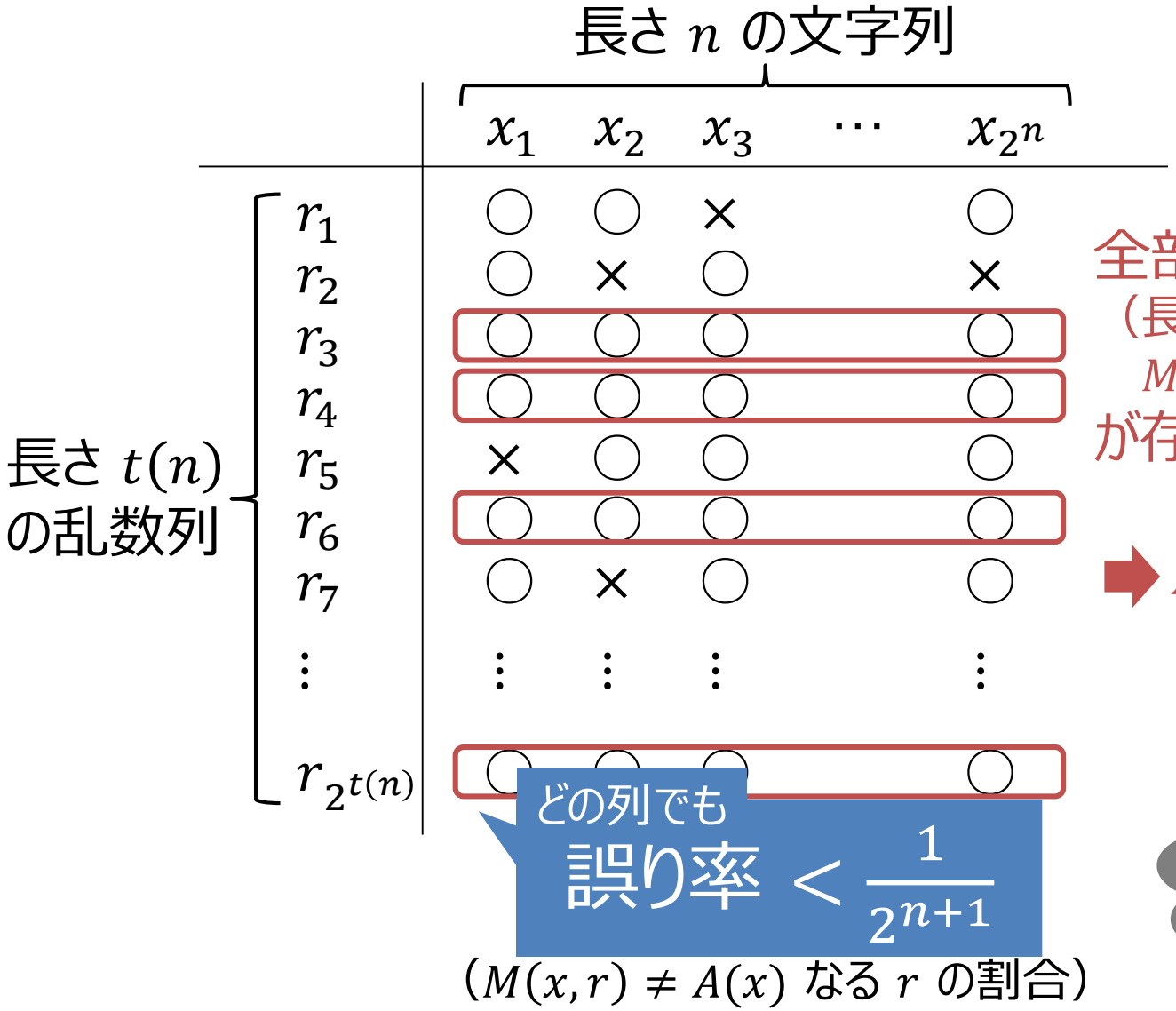
前のビットから完全に決ってしまうようでは役立たず。

乱数の量

或る程度は重要。

$O(\log n)$ビットなら代りに決定的に全部試せる。

$A \in \mathbf{BPP}$ とすると　多項式時間機械 M が存在して



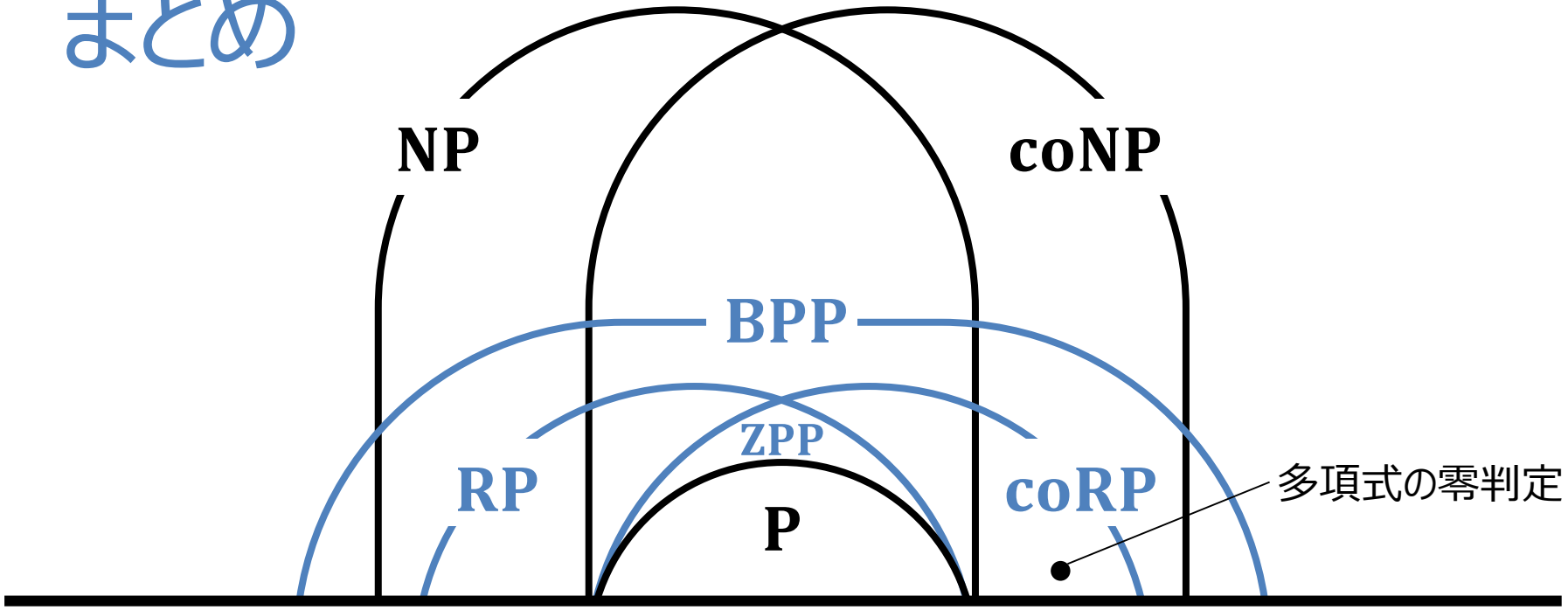
全部○の行
（長さ n の入力すべてで
M を正解させる乱数）
が存在！

➡ $A \in \mathbf{P/poly}$

多項式時間機械
＋少量の助言

BPP は **P** に
かなり近い？
実は等しいかも…？

まとめ



未解決 $\mathbf{BPP} \stackrel{?}{=} \mathbf{P}$

（等しいと予想する人が多い）

終