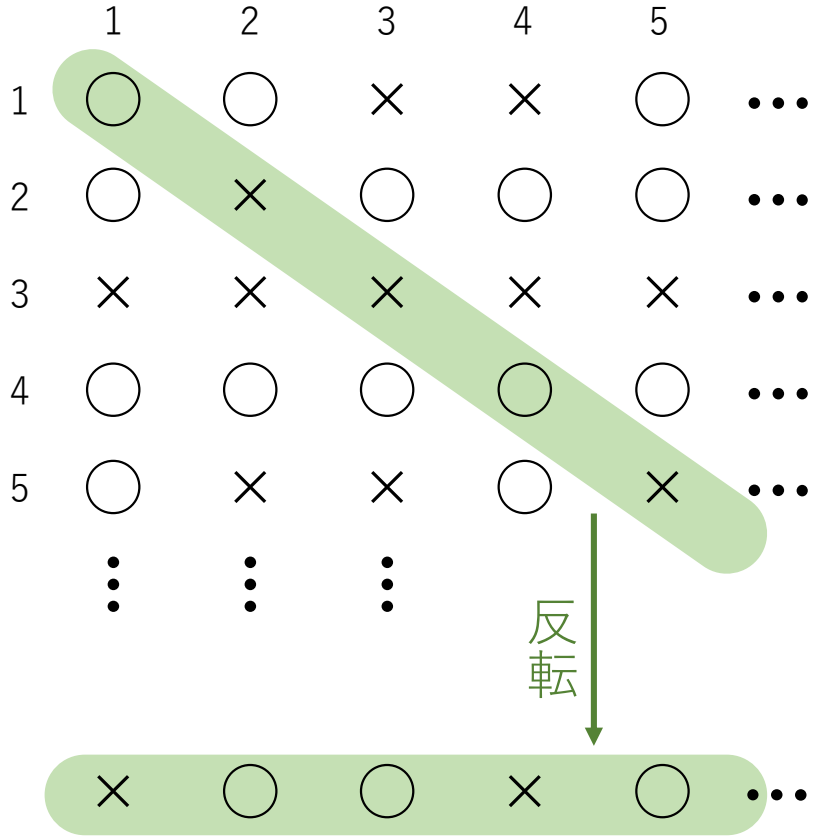
第二日
機械の万能性と限界

対角線論法



番号１２３…を
つけて無限に

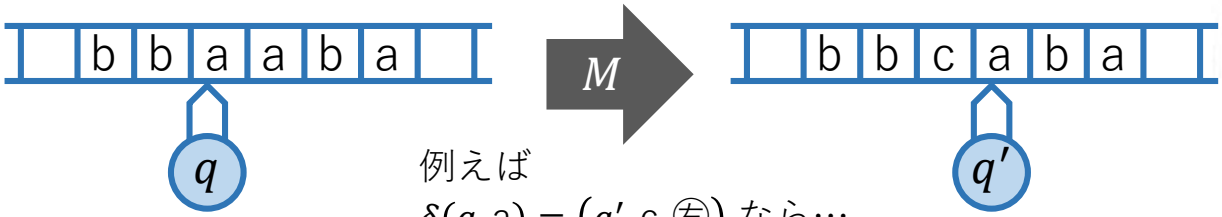
左図のように
○と×を横に並べたものを**○×行**と呼び
○×行を縦に並べたものを**○×表**と呼ぶ

どちらが正しいでしょうか？

うまく○×表を作ろう
あらゆる○×行が現れるようにできる

如何なる○×表に対しても
それに現れない○×行が存在する

∵　左図のように　対角線上の内容と
喰い違うように定義すればよい



例えば
$\delta(q, \mathrm{a}) = (q', \mathrm{c}, ㊨)$ なら…

定義

チューリング機械は次のものにより指定される

- 有限個の**状態**の集合 Q　但し次のものが定まっている
  - 始状態 $q_{始} \in Q$
  - 受理状態の集合 $Q_{受理} \subseteq Q$
- 有限個の**文字**の集合 Σ　これと空白文字 ␣ を含む集合 $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{␣\}$
- **遷移規則** $\delta: Q \times \Gamma \to (Q \times \Gamma \times \{㊧, ㊨\}) \cup \{止\}$

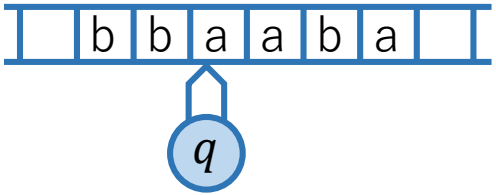
初め機械は始状態 $q_{始}$ にあり　テープ上に与えられた文字列 $x \in \Sigma^*$ の左端から始めて　次のこと（遷移）を繰返す

状態 $q \in Q$ で文字 σ を読むと　$\delta(q, \sigma)$ が

- 「止」ならば停止する
- (q', σ', d) なら　状態を q' にし σ' を書込み d の向きに一歩進む

$Q_{受理}$ に属する状態で停止したら機械は x を**受理**したという

これを厳密に定義すると……

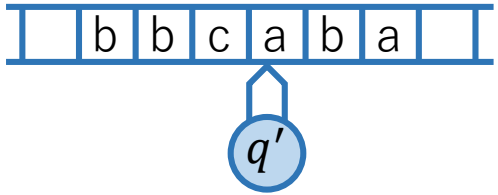


この状況を　bb$q$aaba
のように表すことにする

M

状況の遷移

例えば $\delta(q, \mathrm{a}) = (q', \mathrm{c}, ㊨)$ なら…
（「止」なら次の状況ナシ）



次の状況　bbcq'aba

Γ^* の文字列の途中に Q の元がちょうど 1 回だけ現れる文字列を**状況**と呼び（但し先頭や末尾に ␣ を加えた文字列も同じ状況とみなす）状況の遷移 $\xrightarrow{M}$ を次で定義する

状態 $q \in Q$ と文字 $\sigma \in \Gamma$ に対し

- もし $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', ㊧)$ ならば　任意の $u, v \in \Gamma^*$ と $\tau \in \Gamma$ に対し $u\tau q\sigma v \xrightarrow{M} uq'\tau\sigma' v$
- もし $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', ㊨)$ ならば　任意の $u, v \in \Gamma^*$ に対し $uq\sigma v \xrightarrow{M} u\sigma' q' v$

文字列 $x \in \Sigma^*$ を機械 M が**受理**するとは

状況の有限列 $(s_0, \ldots, s_f)$ であって次を満すものが存在することをいう

- $s_0 = q_{始} x$
- $s_0 \xrightarrow{M} s_1 \xrightarrow{M} s_2 \xrightarrow{M} \cdots \xrightarrow{M} s_f$
- s_f には $\delta(q, \sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ なる $q\sigma$ が現れる

再

チャーチとチューリングの定立

「計算できる」
（機械的な手順で解ける）
＝
（チューリング機械で）
認識可能

ボンヤリした概念

数学的にハッキリ定義した概念

チューリング機械ですべての「計算」が実現できているなんて本当？

幾つかの理由から　今では広く受入れられています

- 現実の計算に出て来そうな色々な手順は
  確かにチューリング機械で書けるようだ（経験上）
- 他の様々なやり方で定義された計算可能性の概念とも一致

でも文字列に関する問題しかないの？

入力を**符号化**する方法を決めた上で文字列に関する問題として扱います

問題 PRIME

0 1 … 9 からなる文字列

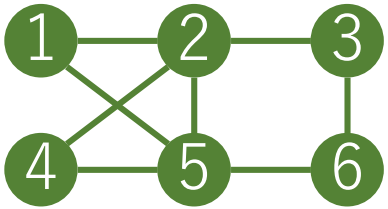
与えられた正整数（十進法で書く）が素数か

問題 HAMILTON

0 1 … 9 ( ) , からなる文字列

与えられたグラフ（次のような形式で書く）がハミルトン閉路をもつか

（全頂点を一度づつ通る辿り方）



符号化

6,(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),
(2,5),(3,6),(4,5),(5,6)

機械は文字列で表せる

チューリング機械は（有限の）文字列で記述できる

遷移規則 $\delta(q, a) = (r, b, d)$ が有限個あるだけ

その文字列（算譜（プログラム））を機械と呼ぶと思ってもよい

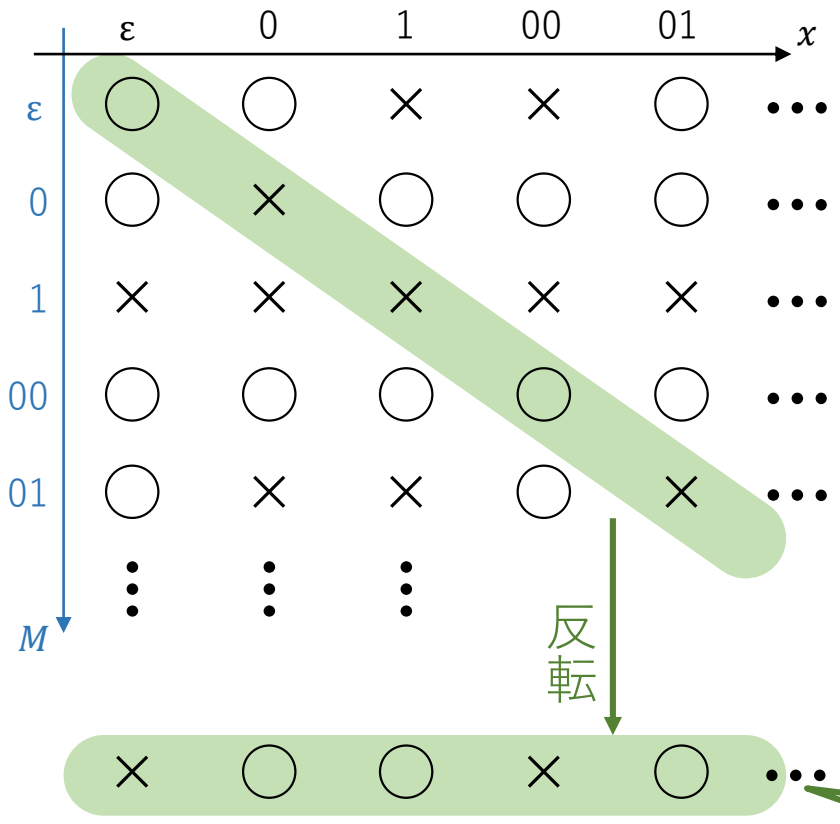
このお蔭で　各機械を実際に建造せずとも
算譜を使って同じ機能を実現できる

ε
0
1
00
01
10
11
000
001
010
011
100
101
110
111
0000
0001
0010
0011
0100
0101

すべての機械は
このどこかに現れる

このことから
如何なる機械によっても
認識されない言語
を構成できる（次頁）

認識可能でない言語



文字列に対応づけて無限に

図のように

○と×を横に並べたものを**○×行**と呼び

○×行を縦に並べたものを**○×表**と呼ぶ

定理

どんな○×表に対しても
それに現れない○×行が存在する

∵　左図のように　対角線上の内容と喰い違うように定義すればよい

各行を機械の動作と考えると……

チューリング機械 M が入力 x を受理するか否かを第 (M, x) 成分に○×で記した表にこの定理を適用

どの機械でも認識されない言語

今の議論で結局　何という問題が認識不能と示されたのか

「算譜を実行する」問題

問題 EVAL

入力　二つの文字列の組 (M, x)

答　機械 M は入力 x を受理するか

認識可能

「万能機械」「算譜内蔵式」

問題 $\overline{\text{EVAL}}$
（EVAL の補集合）

入力　二つの文字列の組 (M, x)

答　機械 M は入力 x を受理**しない**か

認識可能でない

対角線論法で作った問題

入力　文字列 x

答　機械 x は入力 x を受理**しない**か

認識可能でない

EVAL は認識可能だが**判定**可能ではない

任意の入力 x に対し
- もし $x \in$ EVAL ならば x を受理（して停止）
- もし $x \notin$ EVAL ならば x を**受理せずに停止**

すること

M に x を入力した計算が
停止しないことを
有限の時間で確実に
予言する方法はない

問題 SR

入力 書換え規則の集合 R と文字列 $w \in \Sigma^*$

R の各規則は $u \to v$ という形（$u, v \in \Sigma^*$）

文字列の一部を u から v に書換えることができるという意味

つまり $xuy \Rightarrow_R xvy$ とできる

答 R による書換えを次々と w に施して $\overset{\text{空文字列}}{\varepsilon}$ にできるか

$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ と書くことにする

例 1

入力

$$R \begin{cases} \text{aa} \to \text{bbb} \\ \text{aba} \to \text{a} \\ \text{bb} \to \varepsilon \end{cases}$$

$w = \text{aababab}$

答 ○（受理）

（aababab $\Rightarrow_R$ aabab $\Rightarrow_R$ aab $\Rightarrow_R$ bbbb $\Rightarrow_R$ bb $\Rightarrow_R \varepsilon$ とできるので）

例 2

入力

$$R \begin{cases} \text{aa} \to \text{bab} \\ \text{aba} \to \text{a} \\ \text{bb} \to \varepsilon \end{cases}$$

$w = \text{aababab}$

答 ×（不受理）

（a を消せる規則がないので）

問題 SR

入力　書換え規則の集合 R と文字列 $w \in \Sigma^*$

R の各規則は $u \to v$ という形（$u, v \in \Sigma^*$）

文字列の一部を u から v に書換えることができるという意味

つまり $xuy \Rightarrow_R xvy$ とできる

答　R による書換えを次々と w に施して ε（空文字列）にできるか

$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ と書くことにする

例 1

入力

$$R \begin{cases} \text{aa} \to \text{bbb} \\ \text{aba} \to \text{a} \\ \text{bb} \to \varepsilon \end{cases}$$

$w = \text{aababab}$

答　○（受理）

（aababab $\Rightarrow_R$ aabab $\Rightarrow_R$ aab $\Rightarrow_R$ bbbb $\Rightarrow_R$ bb $\Rightarrow_R \varepsilon$ とできるので）

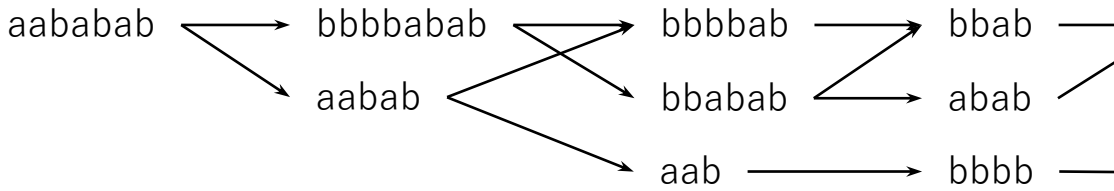
定理

SR は認識可能

書換え 1 回で作れる文字列をすべて列挙（ε があれば受理）

書換え 2 回で作れる文字列をすべて列挙（ε があれば受理）

……と順に調べてゆけばよい



（この方法では $w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ でないときは計算が停止しない）

実は SR は判定可能でないことが後で判る

その前にまず　二つの似た問題のどちらが
より判定可能でありそうか比べる論法（**帰着**）について考えよう

問題 SR

入力　書換え規則の集合 R と文字列 w

答　R による書換えを次々と w に施して空文字列にできるか

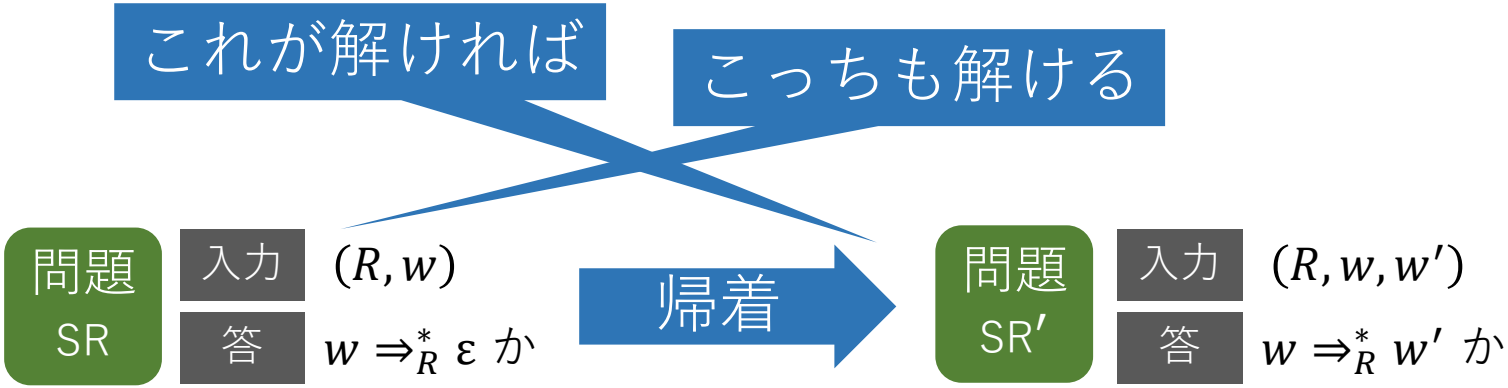
問題 SR′

入力　書換え規則の集合 R と文字列 w, w'

答　R による書換えを次々と w に施して w' にできるか

どちらが
より難しい？

問題の難しさの比較（**帰着**）



入力

(R, w)

が SR に属するか知りたい

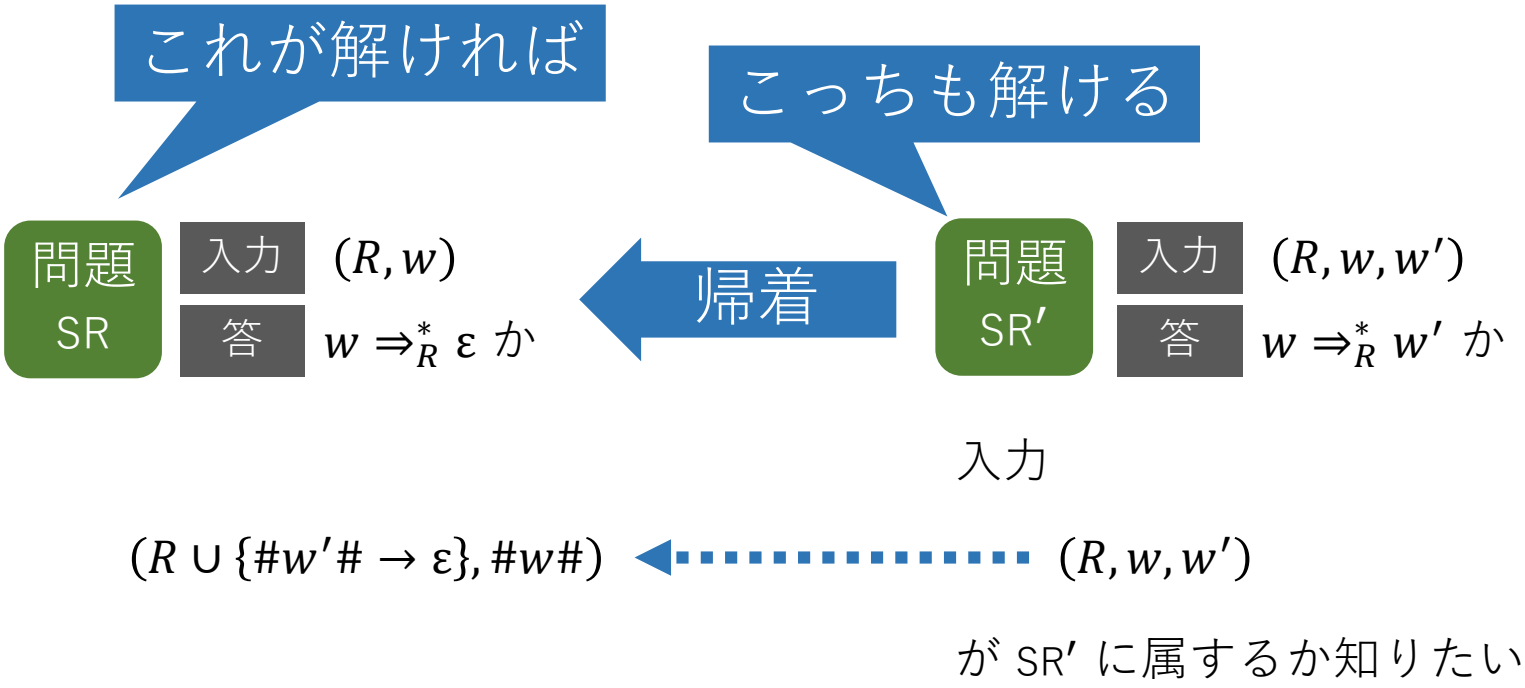
そのためには

(R, w, ε)

が SR′ に属するか調べれば良い

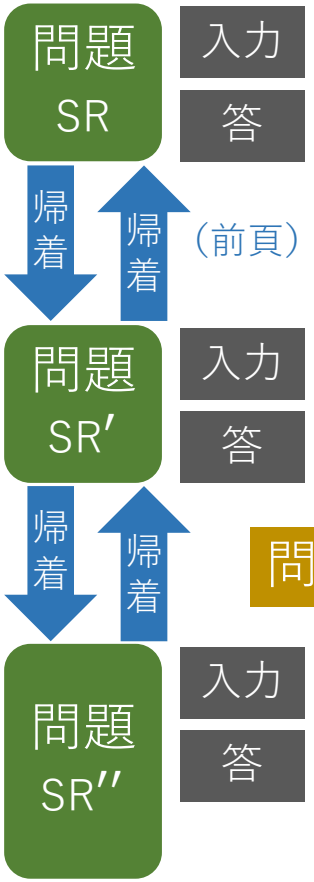
$$(R, w) \in \mathrm{SR} \quad \Leftrightarrow \quad (R, w, \varepsilon) \in \mathrm{SR}'$$

問題の難しさの比較（**帰着**）



二つの問題は（決定可能かどうかに関しては）
「同じ難しさ」であることが判った！

問題の難しさの比較（**帰着**）



入力　書換え規則の集合 R と文字列 w

答　R による書換えを次々と w に施して空文字列にできるか

（前頁）

入力　書換え規則の集合 R と文字列 w, w'

答　R による書換えを次々と w に施して w' にできるか

問　この帰着（SR″ も同じ難しさであること）を示して下さい

入力　書換え規則の集合 R と文字列 w, w''

答　R による書換えを次々と w に施して
w'' が現れる文字列にできるか

定理

SR は決定可能でない（$\overline{\text{SR}}$ は認識[illegible]能でない）

これが決定不能と判っているので

これも

これも決定不能

∵ 右図の帰着による

(M, x) ⋯▶ $(R, \triangleright q_{始} x \triangleleft, ㊎)$

但し R は　M の各状態 $q \in Q$ と文字 $\sigma \in \Gamma$ について次の規則を加えて作る

- もし $\delta(q,\sigma) = (q', \sigma', ㊧)$ ならば　任意の $\tau \in \Gamma$ に対し規則 $\tau q \sigma \to q' \tau \sigma'$
- もし $\delta(q,\sigma) = (q', \sigma', ㊨)$ ならば　規則 $q\sigma \to \sigma' q'$
- もし $\delta(q,\sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ ならば　規則 $q\sigma \to ㊎$

また　規則 $\triangleright \to \triangleright\sqcup$ および規則 $\triangleleft \to \sqcup\triangleleft$ も R に含める　すると

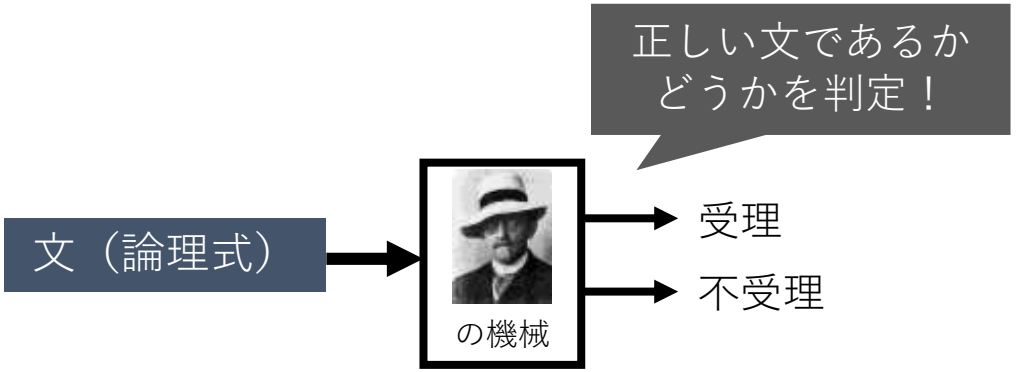
$(M, x) \in$ EVAL　⇔　状況 $q_{始} x$ から遷移 M を辿ってゆくと
$\delta(q,\sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ なる $q\sigma$ が現れる状況に到達

⇔　文字列 $\triangleright q_{始} x \triangleleft$ に R の規則を施して㊎を含む文字列に辿り着ける　（すなわち $(R, \triangleright q_{始} x \triangleleft, ㊎) \in \text{SR}''$）

ヒルベルトの判定問題

一階述語論理で書かれた文が与えられたとき
それが正しい（＝証明可能）か否かを判定して終了する
ような機械的な手順はあるか？ (1928)

A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2, **42**: 230–265, 1936.

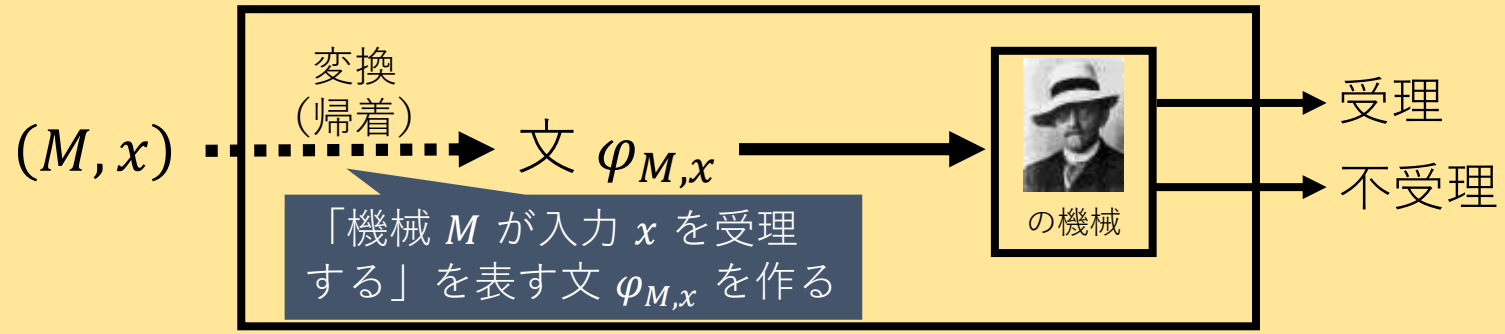


ヒルベルトの判定問題

一階述語論理で書かれた文が与えられたとき
それが正しい（＝証明可能）か否かを判定する
ような機械的な手順はあるか？ (1928)

A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Soci* **42**: 230–265, 1936.

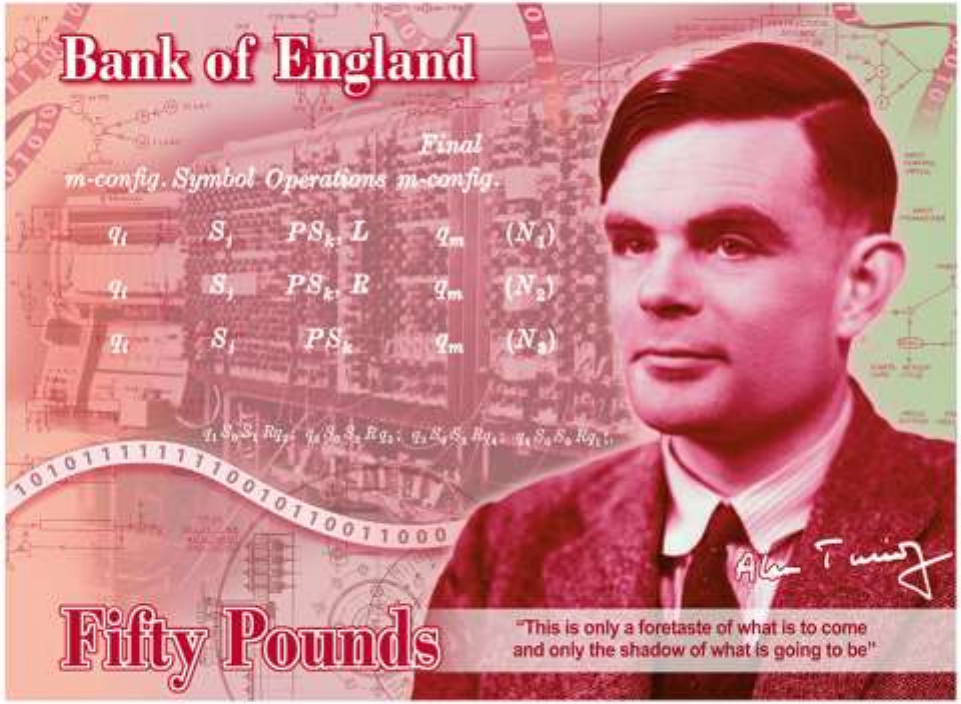
もしあるとすると先程の EVAL が判定できてしまうので、無い



新五十ポンド紙幣（今年から）

BANK OF ENGLAND

Alan Turing Banknote Concept



まとめ　第二日　機械の万能性と限界

- 機械は有限の文字列（算譜）で記述できる
- 入力された算譜を実行する計算ができる（EVAL は認識可能）
- しかし EVAL は判定可能ではない（対角線論法）
- 様々な言語の判定不能性が帰着により示される