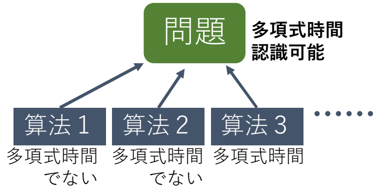
第四日
帰着と完全問題

再

まとめ　第三日　時間と空間の制限

- 時間計算量は「入力長 n のとき時間 $T(n)$ 以内で計算できる」という形で測る（空間計算量も同様）
- 多項式時間（P）　≒　現実的な手間での計算
- それに比べて多項式空間（PSPACE）は
  いかにも非現実的に強そう（指数個の調べ尽しができる）
- しかし「多項式時間$_{認識可能}$ ≠ 多項式空間$_{認識可能}$」は未証明
  （不可能性の証明は難しい）

問題の難しさを証明できる？



問題□□は容易に解けるか？

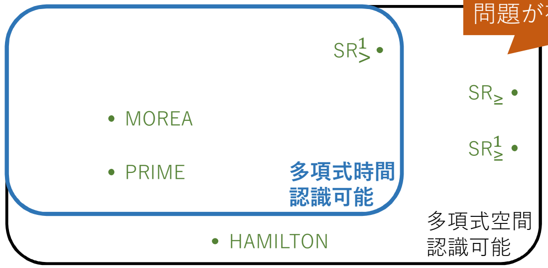
‖

効率の良い算法（＝機械）が
存在するか？

「問題□□は**如何なる算法を以てしても**（時間△△では）解けない」
という証明をすることは難しく　なかなか成功していない……

多項式時間認識可能でなく
多項式空間認識可能である
問題が存在するかは未解決

図では $SR_{\geq}$ や $SR^1_{\geq}$ や HAMILTON が
多項式時間認識可能の外側にあるが
本当にそうとは証明できていない



多項式時間認識可能かどうか不明な重要問題は多い
それでも問題の間の帰着関係によって困難さを比べたり
それにより問題が「おそらく困難」と示したりできる場合がある
（以下で扱う）

定義

言語 A が言語 B に**多項式時間帰着**するとは
多項式時間機械 T が存在して
任意の入力 x に対する T の出力 $T(x)$ が
$x \in A \Leftrightarrow T(x) \in B$ を満すことをいう

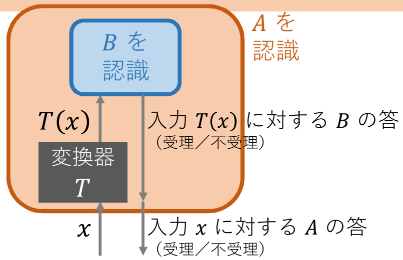
停止したときの
テープ上の文字列

$A \le^{\mathrm{P}} B$ と書く

向きに注意

「A の難しさは B 以下」という
気持なのでこの不等号で表す

「B を使うと A が計算できる」



「B が多項式時間計算可能ならば A も然り」を成立たすには
必ずしも問題 A の入力 x を問題 B の入力 $T(x)$ に対応させるという上記の形でなくてもよい
（例えば $x \in A$ かどうか知るために幾つかの文字列 $y_1, y_2, \cdots$ が B に属するか否かを使うとか）
つまり上記の定義は「帰着」のうち特殊な形のものである
しかし今日の話にはこの形の帰着で十分なので　以下ではこれを単に「帰着」という

$A \le^{\mathrm{P}} B$ であるとすると…

もし B が多項式時間認識可能ならば　A も多項式時間認識可能
もし B が多項式空間認識可能ならば　A も多項式空間認識可能
もし B が　判　定　可　能　ならば　A も　判　定　可　能
もし B が　認　識　可　能　ならば　A も　認　識　可　能

問題どうしの相対的な困難さの比較ができる

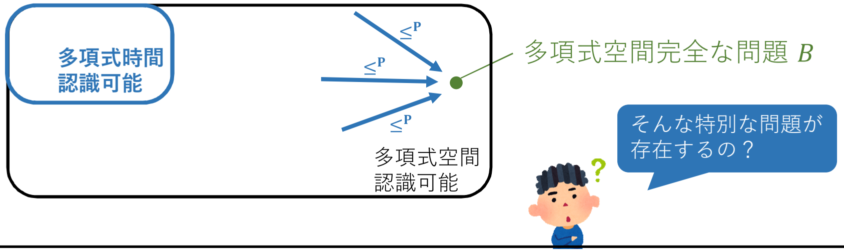
問題		
EVAL	入力	(M, x)
	答	M は x を受理するか
SR	入力	(R, w)
	答	$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ か

第二日には EVAL $\le^{\mathrm{P}}$ SR を示すことで
EVAL の判定不能性から SR の判定不能性を導いた
（その時点では帰着が多項式時間どうかは気にしていなかったが）

定義

多項式空間認識可能な言語 B が**多項式空間完全**であるとは
任意の多項式空間認識可能な言語 A が B に多項式時間帰着する
（$A \le^{\mathrm{P}} B$）ことをいう

「B は多項式空間認識可能な問題のうち最難」
「多項式時間認識可能＝多項式空間認識可能でない限り
　B は多項式時間で解けない」
「多項式空間認識可能とは　複雑さが問題 B 以下であること」



問題		
問題 EVAL	入力	文字列の組 (M, x)
	答	機械 M は入力 x を受理するか
問題 $\mathrm{EVAL_{space}}$	入力	文字列の組 $(M, x, 0^s)$
	答	機械 M は入力 x を空間 s 以下で受理するか

定理

$\mathrm{EVAL_{space}}$ は多項式空間完全

∵　多項式空間認識可能な言語 A を考える
　A を認識する多項式空間の機械 M が存在
　多項式 p が存在し
　任意の長さ n の入力 x に対して M は空間 $\le p(n)$ で停止する
　そこで $T(x) = \left(M, x, 0^{p(n)}\right)$ とすると T は A から EVAL への帰着

定理

SR$_{\geq}$ は多項式空間完全　（同じ証明により SR$'_{\geq}$ も）

第二日の EVAL $\leq^{\mathrm{P}}$ SR$''$ $\leq^{\mathrm{P}}$ SRと同様に
EVAL$_{\mathrm{space}}$ $\leq^{\mathrm{P}}$ SR$''_{\geq}$ $\leq^{\mathrm{P}}$ SR$_{\geq}$ を示す

問題 SR$_{\geq}$
入力　(R, w) 但し各規則が（旧長さ）$\geq$（新長さ）
問　$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ か

帰着（略）

問題 SR$''_{\geq}$
入力　(R, w, w'') 但し各規則が（旧長さ）$\geq$（新長さ）
問　$w \Rightarrow_R^* uw''v$ なる文字列 u, v は存在するか

問題 EVAL$_{\mathrm{space}}$ $\xrightarrow{\text{帰着}}$ 問題 SR$''_{\geq}$

$(M, x, 0^s)$ ⋯⋯▶ $(R, ␣^s\, q_{始} x\, ␣^s, 受)$

R は　M の各状態 $q \in Q$ と文字 $\sigma \in \Gamma$ について次の規則を加えて作る

- もし $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', 左)$ ならば　各 $\tau \in \Gamma$ に対し規則 $\tau q \sigma \to q' \tau \sigma'$
- もし $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', 右)$ ならば　規則 $q\sigma \to \sigma' q'$
- もし $\delta(q, \sigma) =$ 止 かつ $q \in Q_{受理}$ ならば　規則 $q\sigma \to 受$

（EVAL $\leq^{\mathrm{P}}$ SR$''$ のときに設けた「空白文字を端に付け足す規則」 ▸→▸␣ および ◂→␣◂ は設けない）

すると $\boxed{M \text{ は } x \text{ を空間} \leq s \text{ で受理} \iff R \text{ の規則に従って } ␣^s q_{始} x ␣^s \text{ から受を含む文字列に到達できる}}$ が成立

問題 QBF

与えられた量化命題論理式

$$Q_n X_n.\, Q_{n-1} X_{n-1} \cdots Q_1 X_1.\, \varphi(X_1, \dots, X_n)$$

の真偽を判定せよ

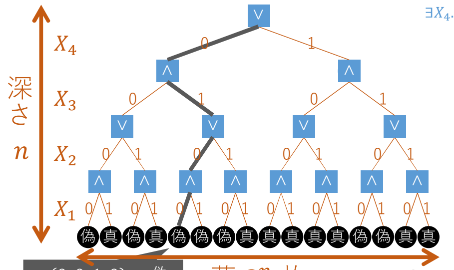
命題変数
真（1）か偽（0）の値をとる

量化子（∀ か ∃）

命題論理式
命題変数から論理記号
∧（かつ）
∨（または）
¬（否定）
を使って作られる式

「二人ゲームでどちらが必勝か判定する問題」

例　$\exists X_4.\, \forall X_3.\, \exists X_2.\, \forall X_1.\, \underline{(X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee X_4)}$



$\exists X_4.\, \forall X_3.\, \exists X_2.\, \forall X_1.\, \varphi(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$\forall X_3.\, \exists X_2.\, \forall X_1.\, \varphi(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$\exists X_2.\, \forall X$

$\forall X$

$\varphi(0, 0, 1, 0) =$ 偽
容易に計算できる

（この例では $n = 4$）

$\mathrm{QBF}(\forall x.\, \psi(x))$
$= \mathrm{QBF}(\psi(0)) \wedge \mathrm{QBF}(\psi(1))$
$\mathrm{QBF}(\exists x.\, \psi(x))$
$= \mathrm{QBF}(\psi(0)) \vee \mathrm{QBF}(\psi(1))$

深さ優先探索
➡ 多項式空間認識可能

定理

QBF は多項式空間完全

問題 SR$_{\geq}$
入力　(R, w) 但し各規則が（旧長さ）$\geq$（新長さ）
問　$w \Rightarrow_R^* \varepsilon$ か

$w \Rightarrow_R^{\leq 2^n} \varepsilon$ かどうかを調べれば良い（昨日）

SR$_{\geq}$ $\leq^{\mathrm{P}}$ QBF を示す

昨日 SR$_{\geq}$ の多項式空間認識可能性を示したときと同じ次の関係を用いる

$x \Rightarrow_R^{\leq 2^{i+1}} y$ ⟺ $\exists\, z\ (x \Rightarrow_R^{\leq 2^i} z$ かつ $z \Rightarrow_R^{\leq 2^i} y)$

「∃ w」は「或る $w \in \Sigma^{<n}$ が存在して」
「∀ w」は「任意の $w \in \Sigma^{<n}$ に対し」の意

⟺ $\exists\, z\ \ \forall\, u, v$
（もし $(u, v) = (x, z)$ または $= (z, y)$ ならば $u \Rightarrow_R^{\leq 2^i} v$）

これを再帰的に用いて

$\underline{w \Rightarrow_R^{\leq 2^n} \varepsilon}$ ⟺

$\exists\, z_n\ \ \forall\, u_n, v_n\ \ \ \exists\, z_{n-1}\ \ \forall\, u_{n-1}, v_{n-1}\ \cdots\cdots\ \exists\, z_1\ \ \forall\, u_1, v_1$
もし $(u_n, v_n) = (w, z_n)$ または $= (z_n, \varepsilon)$ ならば
もし $(u_{n-1}, v_{n-1}) = (u_n, z_{n-1})$ または $= (z_{n-1}, v_n)$ ならば
⋯⋯
もし $(u_1, v_1) = (u_2, z_1)$ または $= (z_1, v_2)$ ならば $u_1 \Rightarrow_R^{\leq 1} v_1$

これを
量化命題論理式として
書くことができる

様々な分野の多項式空間完全問題

様々な到達可能性を判定する問題（文字列の書換え以外にも）

二人ゲームの勝負を判定する問題（囲碁など）　[LS80]

不確実さの下での最適化問題 [Pap85]

有限状態機械の操作に関する問題 [Koz77, JR93]

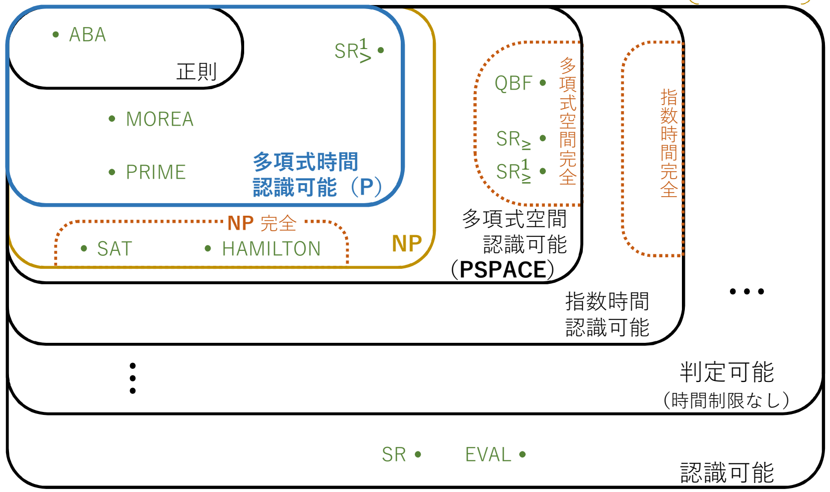
周期的なスケジューリングや配置計画を最適化する問題 [Orl81]

常微分方程式の数値計算に関する問題 [Kaw10]

[LS80] D. Lichtenstein and M. Sipser. Go is polynomial-space hard. *Journal of the ACM*, **27**: 393–401, 1980.
[Pap85] C. H. Papadimitriou. Games against nature. *Journal of Computer and System Sciences*, **31**: 288–301, 1985.
[Koz77] D. Kozen. Lower bounds for natural proof systems. In *Proc. 18th Symposium on the Foundations of Computer Science*, 254–266, 1977.
[JR93] T. Jiang and B. Ravikumar. Minimal NFA problems are hard. *SIAM Journal on Computing*, 22: 1117–1141, 1993.
[Orl81] J. B. Orlin. The complexity of dynamic languages and dynamic optimization problems. In *Proc. 13th ACM Symposium on the Theory of Computing*, 218–227, 1981.
[Kaw10] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, **19**: 305–332, 2010.

複雑さの階層と完全問題

NP については本講義では触れなかった



まとめ　第四日　帰着と完全問題

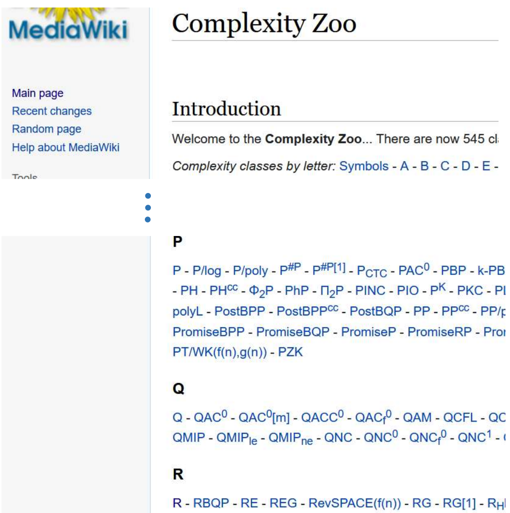
- 帰着により問題の難しさを比べる
- ○○完全　＝　「○○なうちで最難」の問題
- 多様なジャンルの○○完全問題
  見た目は違えど困難さの核心は同じ
- 多項式空間完全な問題
  「到達性の判定」「二者間のゲーム」等の要素からくる困難さ

様々な計算量級（クラス）

本講義で扱った
- 正則（REG）
- 多項式時間認識可能（P）
- 多項式空間認識可能（PSPACE）
- 判定可能（R または Decidable）
- 認識可能（RE または CE）

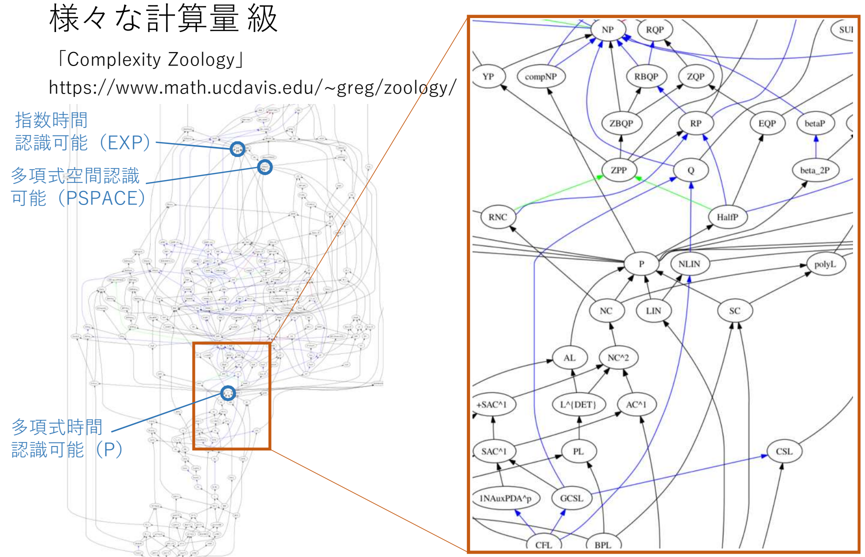
以外にも問題の複雑さの度合を色々な側面から捉えた基準が数多く定義され研究されている

ウェブサイト「Complexity Zoo」 500以上の計算量級を紹介
https://complexityzoo.net/Complexity_Zoo



様々な計算量級（クラス）

「Complexity Zoology」
https://www.math.ucdavis.edu/~greg/zoology/



M・シプサ著、太田・田中監訳『計算理論の基礎 原著第二版』共立出版（平成20年）

岩間一雄『アルゴリズム理論入門』朝倉書店（平成26年）